Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

О некоторых взаимосвязях методов регуляризации и матричной коррекции при нахождении устойчивого решения приближенной системы линейных алгебраических уравнений

В. И. Ерохин, В. В. Волков

Борисоглебский государственный педагогический институт,
ул. Народная 43,397160 Борисоглебск, Россия
E-mail: erohin_v_i@mail.ru, vvvolkov@list.ru

Введение

1. Как известно, задача отыскания устойчивого решения приближенной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является базовой для теории и методов регуляризации. Ее традиционная формулировка хорошо известна (см., например, [1,2]), однако для введения необходимых для последующих выкладок обозначений, дадим ее развернутую постановку.

Задача P_0. Пусть $\bar{A}x = \bar{b}$ – точная совместная конечномерная СЛАУ, $\bar{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{b} \neq 0$, соотношения между размерами $\bar{A}$ и ее рангом не оговариваются, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ – решение указанной системы с минимальной евклидовой нормой (нормальное решение). Численные значения $\bar{A}$ и $\bar{b}$ неизвестны, а вместо них известны приближенные матрица $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и вектор $\tilde{b} \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{b} \neq 0$ такие, что $\left\|\bar{A} - \tilde{A}\right\| \leqslant \mu$, $\left\|\bar{b} - \tilde{b}\right\| \leqslant \delta < \left\|\tilde{b}\right\|$, где $\mu \geqslant 0$ и $\delta \geqslant 0$ – известные параметры, символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова матричная или векторная норма. Полнота ранга матрицы $\tilde{A}$ и совместность системы $\tilde{A}x = \tilde{b}$ в общем случае не предполагается.

По известным $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, μ, δ требуется найти некоторый вектор $x_{\mu\delta} \in \mathbb{R}^n$, являющийся устойчивым приближением к вектору $\bar{x}$, т.е. такой, что $\lim\limits_{\mu,\delta\to 0} x_{\mu\delta} = \bar{x}$.

2. С несовместными СЛАУ часто связывают задачи так называемой матричной коррекции (см., например, [3,4]). Простейшие задачи матричной коррекции имеют вид

Задача K_0: $$\|H\| \to \inf_{\text{система } (\tilde{A}+H)x=\tilde{b} \text{ совместна}}.$$

Задача K_1: $$\left\|\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix}\right\| \to \inf_{\text{система } (\tilde{A}+H)x=\tilde{b}+h \text{ совместна}}.$$

Можно показать [4], что нормальные решения скорректированных с помощью задач K_0, K_1 (и их модификаций) СЛАУ могут быть получены как решения системы $\left(\tilde{A}^{\mathsf{T}}\tilde{A} + \alpha I\right)x = \tilde{A}^{\mathsf{T}}\tilde{b}$, где I – единичная матрица порядка n, при подходящем выборе параметра $\alpha < 0$.

Указанные задачи можно считать обобщениями метода наименьших квадратов и в общем случае они не могут служить инструментами для получения устойчивых решений приближенных СЛАУ. Более того, задачи K_0, K_1 и им подобные могут вообще не иметь решения. Так, например, задачи K_0 и K_1 не имеют решения, если матрица $\tilde{A}$ не имеет полного столбцевого ранга. Однако на практике, например, в задачах обработки экспериментальных данных, при небольших величинах погрешностей в исследуемых переопределенных системах с полноранговыми матрицами, скорректированные системы действительно оказываются близки к точным, а их нормальные решения – к вектору $\bar{x}$.

3. Внимательное прочтение работ А. Н. Тихонова [1,2] позволяет увидеть изложенный в них способ решения задачи P_0, нетрадиционный для сложившейся в последнее время теории и практики регуляризации. Он заключается в переходе от задачи P_0 к некоторой, специальным образом

построенной задаче математического программирования. Более детально этот тезис раскрывается в приведенных ниже утверждениях, изложенных укрупненно по сравнению с [1,2] и собранных в одну теорему.

Теорема 1 [1,2]. 1) *Задача P_0 имеет решение тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна совместная СЛАУ $\widehat{A}x = \widehat{b}$, для которой $\left\|\widehat{A} - \tilde{A}\right\| \leqslant \mu, \left\|\widehat{b} - \tilde{b}\right\| \leqslant \delta$.* 2) *Если решение задачи P_0 существует, то оно является единственным.* 3) *P_0 эквивалентна задаче математического программирования P_1 : $\quad \|x\| \to \min\limits_{\left\|\tilde{b}-\tilde{A}x\right\|=\mu\|x\|+\delta}$, т.е., совпадают как сами решения указанных задач, так и соответствующие условия существования и единственности решений.* 4) *Если существует $x_{\mu\delta}$ – решение задач P_0, P_1, то существует единственная СЛАУ $A^*x = b^*$, для которой $x_{\mu\delta}$ является решением с минимальной евклидовой нормой и выполняются условия $\left\|A^* - \tilde{A}\right\| = \mu, \left\|b^* - \tilde{b}\right\| = \delta$. При этом A^* и b^* единственным образом определяются через $x_{\mu\delta}$ по формулам*

$$b^* = \tilde{b} - \frac{\delta}{\left\|\tilde{b} - \tilde{A}x_{\mu\delta}\right\|} \cdot \left(\tilde{b} - \tilde{A}x_{\mu\delta}\right), A^* = \tilde{A} + \left(b^* - \tilde{A}x_{\mu\delta}\right) \cdot \frac{x_{\mu\delta}^{\mathrm{T}}}{x_{\mu\delta}^{\mathrm{T}} x_{\mu\delta}}.$$

Несложно заметить, что система $A^*x = b^*$ является результатом матричной коррекции системы $\tilde{A}x = \tilde{b}$.

4. Традиционным способом решения задачи P_0 является другой предложенный А. Н. Тихоновым (см., например, [5]) подход, в котором решается задача безусловной минимизации так называемого сглаживающего функционала $\Phi^\alpha(x) = \left\|\tilde{b} - \tilde{A}x\right\|^2 + \alpha\|x\|^2$, где $\alpha \geqslant 0$ – некоторый параметр.

Задача P_2: $$\Phi^\alpha(x) \to \min_x .$$

Обозначим через x_α решение системы $\left(\tilde{A}^{\mathrm{T}}\tilde{A} + \alpha I\right)x = \tilde{A}^{\mathrm{T}}\tilde{b}$ (без ограничений на знак и величину параметра α). Хорошо известно (см., например, [6]), что при любом $\alpha > 0$ вектор x_α существует, является единственным, и именно он является решением задачи P_2. При этом наиболее важно, что при определенным образом выбранном $\alpha > 0$ вектор x_α является устойчивым приближением к вектору $\bar{x}$, и, таким образом, действительно может служить решением задачи P_0. Более точно последнее утверждение сформулировано в приведенной ниже теореме.

Теорема 2 (Модифицированный на случай $\mu \neq \delta$ вариант соответствующей теоремы из [7]). *Пусть объекты $\bar{A}$, $\bar{b}$, $\bar{x}$ отвечают условиям задачи P_0, $p(\mu,\delta)$* и *$q(\mu,\delta)$ – некоторые возрастающие функции μ* и *δ, стремящиеся к нулю при $\mu \to 0$* и *$\delta \to 0$ и такие, что $p(\mu,\delta) \cdot q(\mu,\delta) \geqslant \mu\delta$. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдутся положительные числа δ_ε* и *μ_ε такие, что для любых $\delta < \delta_\varepsilon$, $\mu < \mu_\varepsilon$* и *α, удовлетворяющего условию*

$$\frac{\mu\delta}{q(\mu,\delta)} \leqslant \alpha \leqslant p(\mu,\delta),$$

вектор x_α, являющийся решением задачи P_2 с параметрами $\alpha, \tilde{A} : \left\|\bar{A} - \tilde{A}\right\| \leqslant \mu, \tilde{b} : \left\|\bar{b} - \tilde{b}\right\| \leqslant \delta$, удовлетворяет неравенству $\|\bar{x} - x_\alpha\| \leqslant \varepsilon$.

5. Сравнивая между собой задачи P_1 и P_2, мы видим, что каждая из них как возможный инструмент решения задачи P_0 имеет свои преимущества и недостатки. Так, задача P_1 может показаться менее предпочтительной, поскольку является задачей нелинейной (и невыпуклой) условной минимизации в отличие от задачи P_2, которая является при фиксированном $\alpha > 0$ задачей выпуклой безусловной минимизации с аналитическим представлением решения. В то же время, известной трудностью задачи P_2 является непредставимость в явной и замкнутой форме зависимости подходящего значения α от значений μ, δ, известных из условия задачи P_0.

Указанные выше особенности задач P_1 и P_2 достаточно очевидны и хорошо известны в отличие от еще одного свойства, являющегося менее очевидным и известным. Речь идет о том, что при определенных значениях $\bar{A}$, $\bar{b}$, μ, δ задача P_1 (и, соответственно, P_0) может иметь решение, которое

не является решением задачи P_2 ни при каком $\alpha \geqslant 0$. Ниже мы детализируем условия, при которых подобное происходит, а также попытаемся выяснить, каким же содержательным смыслом обладает в указанных условиях решение задачи P_0.

Исследование условий разрешимости задачи P_1

Для последующих выкладок потребуются следующие обозначения: $\hat{x} = \tilde{A}^{+}\tilde{b}$ – нормальное псевдорешение системы $\tilde{A}x = \tilde{b}$, $\hat{\delta} = \left\|\tilde{b} - \tilde{A}\hat{x}\right\|$ – минимальная величина нормы вектора ее невязки, $\hat{\mu} = \inf\limits_{\text{система } (\tilde{A}+H)x=b \text{ совместна}} \|H\|$.

Лемма 1. *Для того, чтобы уравнение* $\left\|\tilde{b} - \tilde{A}x_\alpha\right\| = \mu \|x_\alpha\| + \delta$ *имело решение при некотором* $\alpha \geqslant 0$ *необходимо, чтобы параметры* μ, δ *удовлетворяли условиям* $\mu \geqslant \max\left\{0, \frac{\hat{\delta}-\delta}{\|\hat{x}\|}\right\}$, $\delta \geqslant 0$.

Лемма 2. *Если уравнение* $\left\|\tilde{b} - \tilde{A}x_\alpha\right\| = \mu \|x_\alpha\| + \delta$ *имеет решение при некоторых* $\alpha_- < 0$ и $\alpha_+ \geqslant 0$, *то выполняется условие* $\|x_{\alpha+}\| < \|x_{\alpha-}\|$.

Теорема 3. *Если задача* P_1 *с параметрами* $\tilde{A}, \tilde{b}, \mu, \delta$ *имеет решение* $x_{\mu\delta}$ *и выполняется условие* $\mu < \frac{\hat{\delta}-\delta}{\|\hat{x}\|}$, *то указанное решение не может быть получено как решение задачи* P_2. *В этом случае вектор* $x_{\mu\delta}$ *является решением системы* $\left(\tilde{A}^{\mathsf{T}}\tilde{A} + \alpha I\right)x = \tilde{A}^{\mathsf{T}}\tilde{b}$ *при некотором* $\alpha < 0$.

Замечание. *Может существовать несколько значений* $\alpha_i < 0$ *и соответствующих значений* x_{α_i}, *являющихся решением системы* $\left(\tilde{A}^{\mathsf{T}}\tilde{A} + \alpha I\right)x = \tilde{A}^{\mathsf{T}}\tilde{b}$ *и удовлетворяющих условию* $\left\|\tilde{b} - \tilde{A}x_\alpha\right\| = \mu \|x_\alpha\| + \delta$. *В этом случае решением задачи* P_1 *является вектор* x_{α_i} *с минимальной евклидовой нормой.*

Наиболее важным следствием из теоремы 3 является то, что при определенных условиях задачи матричной коррекции K_0, K_1 и их разнообразные модификации (см., например, [4]) оказываются эквивалентными задаче P_1, и, следовательно, основной задаче P_0, в силу чего их решения можно использовать для нахождения устойчивого решения приближенной СЛАУ.

Очевидно, что если приближенная СЛАУ $\tilde{A}x = \tilde{b}$ совместна, то, в силу теоремы 1, задача P_1 имеет решение при любых $\mu \geqslant 0$ и $\delta \geqslant 0$. Заметим, что в этом случае $\hat{\delta} = \hat{\mu} = 0$ и мы не получаем противоречия лемме 1. Кроме того, в силу леммы 2, множество решений задачи P_1 совпадает с множеством решений задачи P_2 (кроме специального случая $\mu = \delta = \alpha = 0$, в котором задача P_1 имеет единственное решение – вектор $\hat{x}$, а задача P_2 при неполном столбцевом ранге матрицы $\tilde{A}$ кроме $\hat{x}$ имеет бесконечное множество других решений). Допустим теперь, что приближенная СЛАУ $\tilde{A}x = \tilde{b}$ несовместна. В этом случае определенный интерес может представлять выявление в плоскости параметров μ и δ областей существования и не существования решения задачи P_1. Для этого можно, например, зафиксировать параметр δ и рассмотреть задачу

$$\mathrm{M}: \quad \mu(\delta) \to \min_{\exists x |\ \left\|\tilde{b}-\tilde{A}x\right\| = \mu\|x\|+\delta} \left(= \widehat{\mu}(\delta)\right).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть СЛАУ* $\tilde{A}x = \tilde{b}$ *несовместна. Тогда задача* P_1 *имеет решение при* $\delta \geqslant 0, \mu \geqslant 0$, $\mu \geqslant \widehat{\mu}(\delta)$ *и не имеет решения при* $\mu \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$ и $\mu < \widehat{\mu}(\delta)$. *Область параметров* μ, δ *, ограниченная условиями* $\mu \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$ и $\mu < \widehat{\mu}(\delta)$, *является выпуклой.*

Результаты решения задачи M несколько различаются для случаев, когда матрица $\tilde{A}$ имеет или не имеет полного столбцевого ранга, а более точно, когда имеет или не имеет решение задача K_0. В качестве иллюстрации к теореме на рис. 1 приведены полученные в результате вычислительного эксперимента области разрешимости и неразрешимости задачи P_1 для модельной СЛАУ из книги [8]. В данном примере $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{15\times5}$, $\mathrm{rank}\tilde{A} = 5$, система $\tilde{A}x = \tilde{b}$ несовместна, гипотетическая (но неизвестная) система $\bar{A}x = \bar{b}$ совместна и предположительно $\mathrm{rank}\bar{A} = 4$. Истинные границы погрешностей μ^* и δ^* известны: при неопределенности порядка $0.5 \cdot 10^{-8}$ в элементах $\tilde{A}$ и порядка $0.5 \cdot 10^{-4}$ в элементах

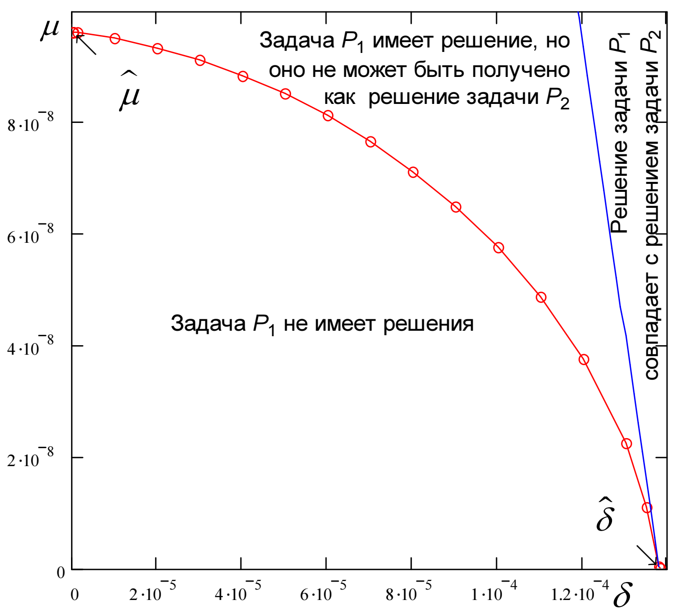

Рис. 1: Области разрешимости и неразрешимости задачи P_1 для модельной СЛАУ
-o-o-o- зависимость $\widehat{\mu}(\delta)$, —— зависимость $\mu = (\hat{\delta} - \delta)\Big/\|\hat{x}\|$

$\tilde{b}$ имеем $\mu^* = 0.5 \cdot 10^{-8} \cdot \sqrt{mn} \approx 4.33 \cdot 10^{-8}$, $\delta^* = 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{m} \approx 1.936 \cdot 10^{-4}$. Задача K_0 имеет решение, $\hat{\mu} \approx 9.629 \cdot 10^{-8}$. Нормальное псевдорешение системы $\tilde{A}x = \tilde{b}$ характеризуется параметрами $\hat{\delta} \approx 1.381 \cdot 10^{-4}$, $\|\hat{x}\| \approx 192.721$.

Список литературы

[1] Тихонов А. Н. О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений // Докл. АН СССР. 1980. Том 254. №3. С. 549-554.

[2] Тихонов А. Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Том 20. №6. С. 1373-1383.

[3] Ерохин В. И. Свойства оптимальной одноранговой коррекции матриц коэффициентов несовместных неоднородных линейных моделей // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. – 2002. – Т. 9, №1. – С. 33-60.

[4] Горелик В. А., Ерохин В. И. Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евквлидовой нормы. – М.: ВЦ РАН, 2004. – 193 с.

[5] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

[6] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

[7] Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // ДАН СССР. – 1965. – Т. 163, №3. – С. 591-594.

[8] Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.