

Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции мантии Земли

А.И. Короткий*, А.Т. Исмаил-заде**, И.А. Цепелев***

* ИММ УрО РАН

ул. С. Ковалевской, 16,
620219 Екатеринбург, Россия
E-mail: korotkii@imm.uran.ru

** МИТП РАН

ул. Профсоюзная, 84/32,
117810 Москва, Россия
E-mail: aismail@mitp.ru

*** ИММ УрО РАН

ул. С. Ковалевской, 16,
620219 Екатеринбург, Россия
E-mail: tsepelev@imm.uran.ru

Работа поддержана РФФИ (грант 05-01-00098).

Рассматривается задача о численном моделировании обратной ретроспективной задачи тепловой конвекции высоковязкой неоднородной несжимаемой жидкости. Под обратной ретроспективной задачей тепловой конвекции жидкости понимается задача о восстановлении состояния жидкости в прошлом по некоторым результатам приближенных измерений ее состояния в настоящем. Под состоянием жидкости в какой-либо момент времени обычно понимают ее скорость, давление, плотность, вязкость и температуру в этот момент времени. Для решения задачи требуется найти (аналитически или численно) решение соответствующей системы дифференциальных уравнений с частными производными, описывающей эволюцию состояний жидкости в обратном направлении времени. Известно, что подобные задачи являются, как правило, некорректными и требуют для численного решения привлечения методов регуляризации [1]–[5].

Модели динамики высоковязкой жидкости получили широкое распространение в геофизике при моделировании различных процессов в недрах Земли. Подобные модели используются, например, при изучении процессов эволюции осадочных бассейнов и соляных диапиров в земной коре, тепловой конвекции в мантии Земли, движения континентов под действием мантийных течений и ряда других задач геофизики. Использование математического моделирования для анализа геолого-геофизических данных приводит к лучшему пониманию природы явлений. Интерес к таким задачам возрастает в связи с увеличивающейся производительностью современных ЭВМ и расширяющимся кругом приложений.

Ранее авторами для решения трехмерных ретроспективных обратных задач тепловой конвекции были предложены вариационный метод [6] и метод квазиобращения [7]. Суть первого метода состояла в том, что решение этой обратной задачи фактически сводилось к решению серии прямых корректных задач. Суть второго метода состояла в регуляризации уравнения теплового баланса, входящего в математическую модель тепловой конвекции, некоторыми добавочными дифференциальными выражениями и непосредственном решении регуляризованной задачи в обратном направлении времени. Эти методы были реализованы программно и использовались для решения обратных задач реконструкции истории развития соляных диапиров и мантийных плюмов [8]–[11]. Численное моделирование истории развития мантийных плюмов позволило сделать ряд интересных выводов об их эволюции [12].

Исследования по сейсмической томографии мантии Земли явно указывают на наличие низкоскоростных аномалий, связанных с индивидуальными мантийными плюмами, которые протягиваются до среднемантийных глубин. Происхождение мантийных плюмов на этих глубинах является крайне проблематичным, так как нет убедительных свидетельств существования там теплового погранслоя, который мог бы быть их источником. Расчеты и численное моделирование влияния тепловой диффузии на эволюцию мантийных плюмов показывают, что плюмы, образованные на границе ядра и мантии, теряют свои ножки (вертикальные каналы поднимающегося горячего вещества) в процессе своей тепловой эволюции. Горячий мантийный материал теплового погранслоя внедряется в относительно холодную мантию и дает начало восходящим мантийным плюмам (вследствие гравитационной неустойчивости такой системы). В течение некоторого времени мантийные плюмы подпитываются из этого источника,

который ослабевает со временем. При этом восхождение плюма замедляется, уменьшается конвективный теплоперенос и увеличивается кондуктивный перенос тепла от плюма к окружающей мантии. Последующая эволюция мантийных плюмов контролируется тепловой диффузией. Численные эксперименты показали, что замедление или перерыв в тепломассопереносе материала плюма (из-за истощения горячего мантийного материала теплового погранслоя) приводит к диффузионному исчезновению ножек плюмов, а затем и их шапок [12].

В данной заметке даются краткое описание математической модели и методов решения рассматриваемой обратной задачи. Приводятся также результаты расчетов некоторых модельных примеров.

Математическая модель термоконвективных течений высоковязкой неоднородной несжимаемой жидкости в обратном направлении времени в приближении Обербека—Буссинеска включает в себя [13]–[16] начально-краевую задачу для определения температурного поля

$$\begin{cases} \partial T / \partial t + \langle \nabla T, \mathbf{u} \rangle = \Delta T + f, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \sigma_1 T + \sigma_2 \partial T / \partial \mathbf{n} = T_b, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ T(\vartheta, \mathbf{x}) = T_\vartheta(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

и краевую задачу для определения скорости и давления

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\mu \mathbf{e}_{ij}) = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_3, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad \partial \mathbf{u}_\tau / \partial \mathbf{n} = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, l_3) \subset \mathbb{R}^3$ — модельная область изменения пространственных переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$; $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ — вектор скорости движения жидкости; \mathbf{e}_3 — орт вертикальной оси Ox_3 ; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали в точках границы $\partial\Omega$ области Ω ; \mathbf{u}_τ — проекция вектора скорости на касательную плоскость в точках границы $\partial\Omega$; p — давление; μ — вязкость; $\mathbf{e}_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ — тензор скоростей деформаций; ∇ — операция взятия градиента; div — операция взятия дивергенции; Δ — оператор Лапласа; T — температура; T_ϑ — температура при $t = \vartheta$; f — плотность внутренних источников тепла; Ra — число Рэлея; σ_1 и σ_2 — некоторые кусочно-гладкие неотрицательные функции на $\partial\Omega$ ($\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \neq 0$). Подбирая функции σ_1 , σ_2 и T_b соответствующим образом, можно смоделировать подходящие условия теплообмена на границе области Ω , в частности, можно получить заданное распределение температуры или теплового потока на каком-либо участке границы. Символами Γ_1 и Γ_2 обозначены участки границы $\partial\Omega$ области Ω такие, что $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Физические параметры жидкости (температура, скорость, давление, вязкость, плотность) считаются переменными, зависящими от времени и пространственных координат. Вязкость и плотность зависят от температуры. Соотношения (1) и (2) приведены в безразмерном виде.

Ретроспективная обратная задача тепловой конвекции формулируется следующим образом: найти поле скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, давление $p = p(t, \mathbf{x})$ и температуру $T = T(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющие при $t \in [0, \vartheta]$ в области Ω краевым задачам (1) и (2). Поскольку эта задача является некорректной (см., например, [1]–[5]), требуется разработать устойчивые методы ее численного решения.

Опишем кратко вариационный метод решения обратной задачи (VAR). Рассмотрим неотрицательный функционал

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} |T(\vartheta, \mathbf{x}; \varphi) - T_\vartheta(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x},$$

где $T(\vartheta, \cdot; \varphi)$ — решение прямой задачи (1), взятое в финальный момент времени ϑ и соответствующее некоторому начальному распределению температуры $\varphi = \varphi(\cdot)$; $T_\vartheta = T(\vartheta, \cdot; T_0)$ — известное распределение температуры, взятое в финальный момент времени при начальном распределении $T_0 = T_0(\cdot)$ (оно неизвестно, его и следует найти). Будем искать минимум этого функционала по аргументу φ . Ясно, что наименьшее нулевое значение функционала достигается на единственном элементе $\varphi^* = T_0$ (единственность минимизирующего элемента следует из единственности решения соответствующей краевой задачи для уравнения теплового баланса): $J(T_0) = 0$, $J'(T_0) = 0$.

Нахождение минимума можно осуществить градиентным методом

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - \alpha_k J'(\varphi_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

параметры метода — положительные числа α_k — выбираются некоторым специальным образом (например, методом минимальной ошибки [17]), φ_0 — некоторое начальное приближение. Значение градиента функционала J в точке φ определяется равенством $J'(\varphi) = \Psi(0, \cdot)$, где Ψ — решение так называемой сопряженной краевой задачи (легко заметить, что после обращения времени она преобразуется в начально-краевую задачу в прямом направлении времени)

$$\begin{cases} \partial \Psi / \partial t + \langle \nabla \Psi, \mathbf{u} \rangle = -\Delta \Psi, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \sigma_1 \Psi + \sigma_2 \partial \Psi / \partial \mathbf{n} = 0, & \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \Psi(\vartheta, \mathbf{x}) = 2(T(\vartheta, \mathbf{x}; \varphi) - T_\vartheta(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи (1)–(2) вариационным методом фактически сводится к решению серии прямых задач, в которых последовательно определяются приближения φ_k , $k = 1, 2, \dots$, и которые, как известно, является корректно поставленными задачами.

Опишем кратко решение обратной задачи методом квазиобращения (QRM). Рассмотрим вспомогательную регуляризованную задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial T_\beta}{\partial t} - \langle \nabla T_\beta, \mathbf{u}_\beta \rangle = \Delta T_\beta - \beta \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^5 T_\beta}{\partial t \partial x_i^4} + f, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \sigma_1 T_\beta + \sigma_2 \partial T_\beta / \partial \mathbf{n} = T_b, & \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \sigma_1 \partial T_\beta^2 / \partial \mathbf{n}^2 + \sigma_2 \partial T_\beta^3 / \partial \mathbf{n}^3 = 0, & \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ T_\beta(\vartheta, \mathbf{x}) = T_\vartheta(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\mu_\beta \mathbf{e}_{\beta ij}) = -\nabla p_\beta + Ra T_\beta \mathbf{e}_3, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\beta = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}_\beta = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \langle \mathbf{u}_\beta, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad \partial \mathbf{u}_{\beta \tau} / \partial \mathbf{n} = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (4)$$

Регуляризация в (3) состоит в добавлении дополнительных слагаемых более высокого порядка дифференцирования с некоторым малым параметром регуляризации $\beta > 0$ и добавлении дополнительного граничного условия. Вспомогательная задача является устойчивой при $\beta > 0$, поэтому для ее решения можно воспользоваться обычными численными методами. Решение вспомогательной возмущенной задачи (3)–(4) примем за приближение к решению исходной невозмущенной задачи (1)–(2). Сходимость решения регуляризованной задачи к решению исходной некорректной задачи (1)–(2) при $\beta \rightarrow 0$ теоретически установить довольно трудно. Альтернативный путь — проведение численного анализа, который позволит оценить реальную обусловленность предлагаемого метода численного решения задачи и сферу его применимости.

Еще одним методом решения рассматриваемых задач, который часто используется на практике в силу его сравнительной простоты, является метод обратной адвекции (ВАМ) [18]–[20]. Суть этого метода состоит в том, что в уравнении теплового баланса (1) пренебрегают диффузией тепла. В результате этого решение задачи в обратном направлении времени упрощается и становится осуществимым каким-нибудь из методов решения уравнения переноса для вязкой неоднородной среды.

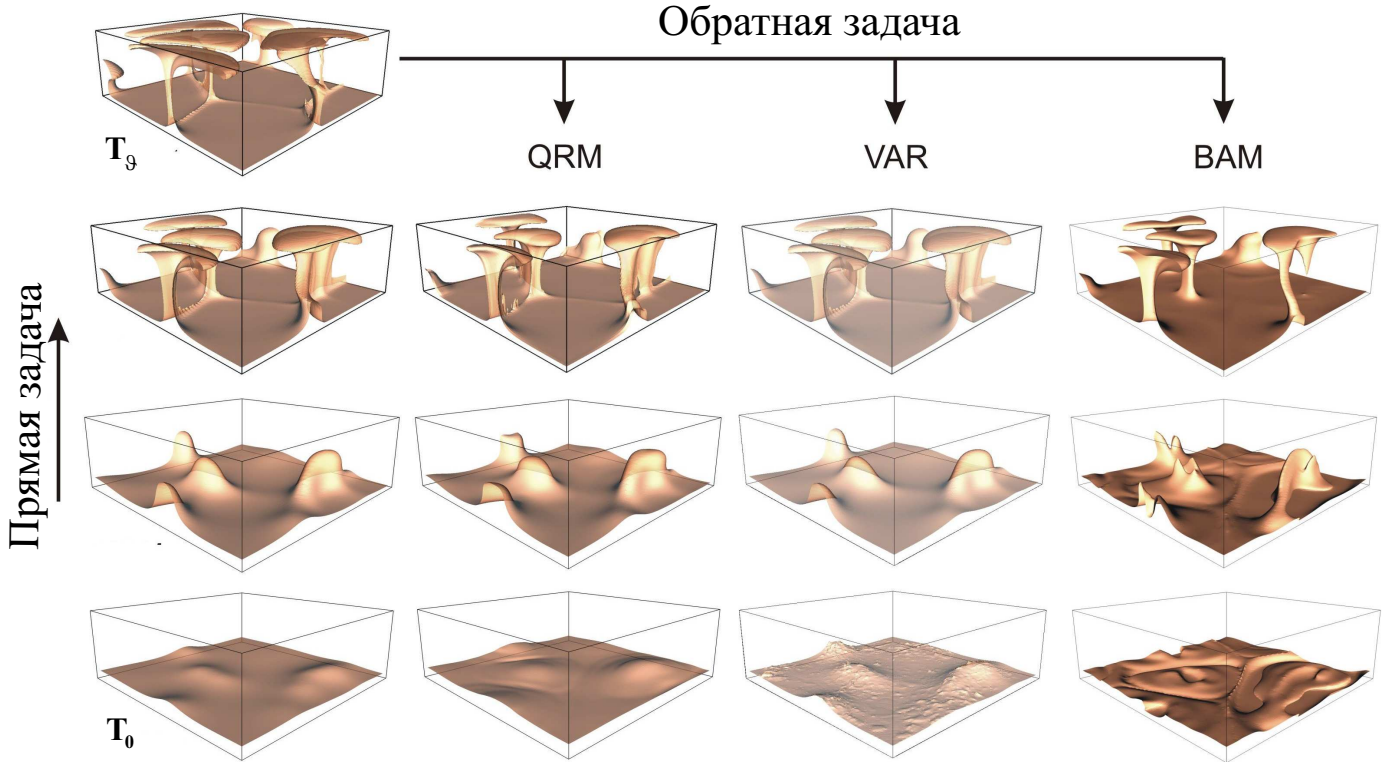
Каждый из упомянутых здесь методов решения обратной ретроспективной задачи имеет свои достоинства и недостатки, подробно этот вопрос обсуждается в [11]. Детали вычислительных методов, ориентированных на применение многопроцессорных ЭВМ, описаны в [6]–[11], см. также [21, 22].

Приведем результаты расчетов модельного примера. В модельной области $\overline{\Omega} = [0, 3] \times [0, 3] \times [0, 1]$ полагаем $T(t, \mathbf{x}) \equiv 0$ для $\mathbf{x} \in \Gamma(x_3 = l_3)$; $T(t, \mathbf{x}) \equiv 1$ для $\mathbf{x} \in \Gamma(x_3 = 0)$; на боковых гранях $\overline{\Omega}$ зададим

условие $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$. В задаче (2) ограничимся случаем граничных условий идеального скольжения с непроницаемостью полагая $\Gamma_2 = \partial\Omega$. Пусть $f \equiv 0$, $Ra = 9.5 \times 10^5$, $\vartheta = 0.003$. Зависимость вязкости от температуры задавалась следующим выражением $\mu(t, \mathbf{x}; T) = \exp(Q/(T + G) - Q/(0.5 + G))$, $Q = 255/\ln(r) - 0.25/\ln(r)$, $G = 15/\ln(r) - 0.5$, $r = 20$.

Для того, чтобы получить исходное состояние температуры T_ϑ для решения обратной задачи, предварительно решается прямая задача (1)–(2) с некоторым начальным состоянием $T(0, \cdot) = T_0(\cdot)$.

Соответствующие результаты численных расчетов для VAR, QRM и BAM методов приведены на следующем рисунке.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969.
3. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1980.
4. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
5. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
6. *Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М., Цепелев И.А.* Трехмерное численное моделирование обратной задачи тепловой конвекции // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2003. Т. 43. № 4. С. 614–626.
7. *Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Цепелев И.А.* Трехмерное численное моделирование обратной задачи тепловой конвекции на основе метода квазиобращения // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2006. Т. 46. № 12. С. 2277–2288.
8. *Ismail-Zadeh A.T., Tsepelev I.A., Talbot C.J., Korotkii A.I.* Three-dimensional forward and backward modelling of diapirism: Numerical approach and its applicability to the evolution of salt structures in the Pricaspian basin // Tectonophysics. 2004. V. 387. P. 81–103.
9. *Ismail-Zadeh A., Schubert G., Tsepelev I., Korotkii A.* Inverse problem of thermal convection: numerical approach and application to mantle plume restoration // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 2004. Vol. 145. P. 99–114.
10. *Ismail-Zadeh A., Schubert G., Tsepelev I., Korotkii A.* Three-dimensional forward and backward numerical modeling of mantle plume evolution: Effects of thermal diffusion // Journal of Geophysical Research. 2006. Vol. 111, № B6 (B06401, doi:10.1029/2005JB003782).
11. *Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Schubert G., Tsepelev I.* Quasi-reversibility method for data assimilation in models of mantle dynamics // Geophysical Journal International. 2007. (To appear).
12. *Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Крупский Д.П., Цепелев И.А., Шуберт Дж.* Эволюция тепловых плюмов в мантии Земли // Доклады РАН. 2006. Т. 411, №4. С. 523–526.
13. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
14. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
15. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford:Clarendon Press. 1961.
16. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
17. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс. 2002.
18. *Ismail-Zadeh A.T.* A time-inverse problem of gravitational instability: numerical approach and applications // Geophys. Res. Abstracts. 1999. Vol. 1. P. 61.
19. *Steinberger B., O'Connell R.J.* Advection of plumes in mantle flow: implications for hotspot motion, mantle viscosity and plume distribution // Geophysical Journal International. 1998. Vol. 132. P. 412–434.
20. *Conrad C.P., Gurnis M.* Seismic tomography, surface uplift, and the breakup of Gondwanaland: Integrating mantle convection backwards in time // Geochem. Geophys. Geosys. 2003. Vol. 4(3): doi: 10.1029/2001GC000299.
21. *Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М., Суетов А.П., Цепелев И.А.* Реализация трехмерной гидродинамической модели эволюции осадочных бассейнов // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1998. Т. 38. №7. С. 1190–1203.
22. *Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М., Цепелев И.А.* Численное моделирование трехмерных вязких течений под воздействием гравитационных и тепловых эффектов // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2001. Т. 41. №9. С. 1399–1415.