Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Учет истокопредставимости решений обратных задач в методе М.М. Лаврентьева

А.С. Леонов*

* **МИФИ,**
Каширское ш., 31,
115409 Москва, Россия
E-mail: ilposed@orc.ru

Работа была поддержана РФФИ (грант 05-01-00049)

1. Пусть Z – гильбертово пространство, а $\mathcal{L}_+(Z)$ – множество линейных ограниченных самосопряженных положительных операторов, действующих в Z. Полагая, что $A \in \mathcal{L}_+(Z)$, $u \in U$, $(A \neq 0, u \neq 0)$, рассмотрим операторное уравнение

$$Az = u, \quad z \in Z. \tag{1}$$

Будем считать, что оно имеет единственное решение $\overline{z} \in Z$. Пусть, далее, вместо точных данных задачи $\{A, u\}$ в нашем распоряжении имеются приближенные данные $\{A_h, u_\delta, h, \delta\}$, где известный приближенный оператор $A_h \in \mathcal{L}_+(Z)$ аппроксимирует оператор A с точностью h: $\|A_h - A\| \leq h$, а $u_\delta \in U$ – приближение с точностью δ для правой части u: $\|u - u_\delta\| \leq \delta$. Уровни ошибок приближенных данных $\eta = (h, \delta)$ считаются известными. Необходимо по данным $\{A_h, u_\delta, h, \delta\}$ найти такой элемент $z_\eta \in Z$, что $\|z_\eta - \overline{z}\| \to 0$ при $\eta \to 0$.

Эту задачу можно решить с помощью (итерированного) метода М.М.Лаврентьева, в котором $z_\eta = g_\alpha(A_h)u_\delta$, $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}[1 - (\frac{\alpha}{\alpha+\lambda})^m]$, $m \in \mathbb{N}$, при адекватном выборе параметра $\alpha = \alpha_\eta$. Известно, однако, что такое приближенное решение не всегда имеет оптимальный порядок точности. Например, если $\overline{z} \in M_{rp} = \{z = A^p v : v \in Z, \|v\| \leq r\}$, то точность метода не будет оптимальной по порядку на классе M_{rp} при $p > m$. Такое "насыщение точности"можно исключить, явно используя в методе информацию об истокопредставимости решения.

2. Пусть имеется априорная информация о включении $\overline{z} \in Mf_r = \{z = f(A)v : v \in Z, \|v\| \leq r\}$ (r – неизвестно). Функция $f(\lambda)$, определяющая класс Mf_r истокопредставимых решений, считается непрерывной и возрастающей на $[0, \|A\|]$, причем $f(0) = 0$. Тогда $\overline{z} = f(A)\overline{v}$. Из (1) получается уравнение $Bv = u$, где $B = Af(A)$, с единственным решением $v = \overline{v}$. Приближенными данными для этого уравнения будут $B_h = A_h f(A_h)$ и u_δ. Модифицированный метод Лаврентьева, явно учитывающий истокопредставимость решения, основан на использовании элементов $z_\eta^\alpha = f(A_h)v_\eta^\alpha$, где $v_\eta^\alpha = g_\alpha[A_h f(A_h)]u_\delta = g_\alpha(B_h)u_\delta$ – параметрическое семейство для решения уравнения $Bv = u$.

Используем следующее предположение: $\|f(A) - f(A_h)\| \leq \zeta(h)$, причем $\zeta(h) \leq k_1 f(\lambda_\eta)$. Здесь λ_η – корень уравнения $\lambda f(\lambda) = \delta + rh$, а k_1 не зависит от η. Введем также величину $K(\alpha) = \sup\{f(\lambda)g_\alpha[\lambda f(\lambda)] : \lambda \in [0, a]\}$, $a = \max\{\|A\|, \|A_h\|\}$.

Теорема. 1) *Пусть параметр $\alpha_\eta > 0$ можно выбрать априорно так, что $K(\alpha_\eta)(\delta + h + \alpha_\eta^{-1}) \leq k_2 f(\lambda_\eta)$, где k_2 не зависит от η. Тогда приближенные решения модифицированного метода Лаврентьева $z_\eta^{\alpha_\eta}$ имеют оптимальный порядок точности $O[f(\lambda_\eta)]$ на классах Mf_r $\forall r > 0$.*

2) *Если $\alpha_\eta > 0$ выбрано по обобщенному принципу невязки для разрешимого уравнения $Bv = u$, т.е. как корень уравнения $\rho(\alpha) = \left\|A_h f(A_h)v_\eta^\alpha - u_\delta\right\| - C(\delta + h\left\|v_\eta^\alpha\right\|) = 0$, ($C = \mathrm{const} > C_f$; постоянная C_f определяется видом функции f), то соответствующие приближения $z_\eta^{\alpha_\eta}$ также оптимальны по порядку точности на классах Mf_r.*

Приведем пример. Пусть $Mf_r = M_{rp}$. Тогда из теоремы следует, что для обеспечения оптимального порядка точности приближенных решений $z_\eta^{\alpha_\eta}$ можно использовать априорный выбор $\alpha_\eta = \delta + h$.

Если данные задачи (1) масштабировать так, что выполнено неравенство $a \leq 1/2$, то во второй части теоремы $C_f = 2$.

3. Для вполне непрерывного оператора A, проводя конечномерную аппроксимацию задачи (1) по схеме из [1], т.е. сводя (1) к системе линейных уравнений $\widehat{A}\widehat{z} = \widehat{u}$ ($\widehat{z} \in \mathbb{R}^N$, $\widehat{u} \in \mathbb{R}^M$), можно выписать конечномерные приближенные решения модифицированного метода Лаврентьева через сингулярное разложение матрицы $\widehat{A} = \widehat{U}\widehat{R}\widehat{V}^T$: $\widehat{z}_\eta^{\alpha_\eta} = \widehat{V} f^2(\widehat{R}^T\widehat{R}) g_{\alpha_\eta}[\widehat{R}^T\widehat{R} f^2(\widehat{R}^T\widehat{R})]\widehat{R}^T\widehat{U}^T\widehat{u}$. Здесь $\widehat{U}, \widehat{V}$ – ортогональные матрицы, а $\widehat{R}$ – прямоугольная диагональная матрица сингулярных чисел матрицы $\widehat{A}$.

Аналогично, если уравнение (1) есть одномерное интегральное уравнение типа свертки с ядром $K(x) \in L_2(\mathbb{R})$, то после его конечномерной аппроксимации можно получить приближенное решение по модифицированному методу Лаврентьева в виде:

$$\widehat{z}^\alpha = \widehat{F}^{-1}\left\{ f(|\widehat{F}(\widehat{K})|) g_\alpha \left(|\widehat{F}(\widehat{K})| f(|\widehat{F}(\widehat{K})|) \right) \widehat{F}(\widehat{u}) \right\}, \tag{2}$$

где $\widehat{F}, \widehat{F}^{-1}$ – операторы прямого и обратного дискретного преобразования Фурье, а $\widehat{K}, \widehat{u}$ – векторы, аппроксимирующие функцию ядра и правую часть решаемого уравнения. Формула подобного рода справедлива и для решения многомерных уравнений типа свертки.

Теоретические результаты как в теореме 1 можно получить не только для метода Лаврентьева, но и для других методов, определяемых функциями g_α со стандартными свойствами из [2].

4. Численно проиллюстрируем предлагаемую методику на примере решения ретроспективной обратной задачи диффузии загрязнителя в водоемах. Прямая задача имеет вид: найти классическое решение $v(x,y,t)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, задачи Коши

$$v_t = D\Delta_2 v; \quad v(x,y,0) = v_0(x,y) \in C(\mathbb{R}^2) \cap L_2(\mathbb{R}^2).$$

Обратная задача состоит в определении функции $\overline{z}(x,y) = v(x,y,\tau) \in Z = L_2(\mathbb{R}^2)$ – решения прямой задачи в момент $\tau > 0$, если известно ее решение $u(x,y) = v(x,y,t) \in Z$ в некоторый последующий момент $t: \ t > \tau$. С помощью операторов полугруппы $\{T_t\}_{t>0}$ для прямой задачи эта обратная задача сводится к операторному уравнению (1) с $A = T_{t-\tau}$, причем решение $\overline{z} = (T_{t-\tau})^p v_0$ – имеет известную степень истокопредставимости $p = \tau/(t-\tau)$. Приближенно решая это двумерное интегральное уравнение первого рода типа свертки по модифицированному методу Лаврентьева ($m = 1$) для $f(\lambda) = \lambda^p$ с использованием двумерного аналога формулы (2) и выбирая параметр регуляризации по обобщенному принципу невязки, получим представленные на рисунках результаты.

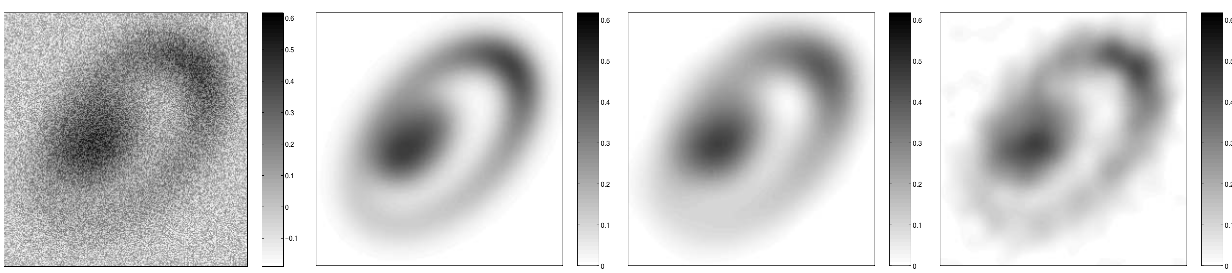

Рис.1. **Рис.2** **Рис.3** **Рис.4**

Рис.1. Приближенные данные задачи с $\delta = 0.1$. Рис.2. Точное решение $\overline{z}$. Рис.3. Приближенное решение по модифицированному методу Лаврентьева, т.е без насыщения точности. Рис.4. Приближенное решение по обычному методу Лаврентьева, имеющему насыщение точности при $p > 1$.

Расчеты проведены на сетке 256×256 в единичном квадрате для модельной задачи с безразмерными параметрами $D = 0.04, t = 0.075, \tau = 0.05$, которые соответствуют некоторой реальной задаче диффузии загрязнителя. В этом случае $p = 2$. Отметим, что эти результаты получены при сравнительно высоком уровне погрешности данных u_δ задачи ($\sim 10\%$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
2. Вайникко Г.М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту: Изд-во ТГУ, 1982.