Международная конференция "Обратные и некорректные задачи математической физики", посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

О восстановлении входов в экспоненциально устойчивых линейных системах, подверженных малым возмущениям

В.И. Максимов*

* ИММ УрО РАН,
ул. С.Ковалевской, 16,
620219 Екатеринбург, Россия
E-mail: maksimov@imm.uran.ru

Работа была поддержана РФФИ (грант 07-01-00008).

Рассматривается система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + Cu(t), \tag{1}$$

$$t \in T = [0, +\infty), \quad y(0) = y_0; \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^q,$$

где C — $(n \times q)$-мерная матрица, f — $(n \times n)$-мерная матричная функция, удовлетворяющая условию Липшица. Траектория системы

$$y(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad n_1 < n, \quad y_2 \in \mathbb{R}^{n-n_1}$$

зависит от меняющегося во времени входного воздействия (управления) $u = u(t)$. Заранее как это управление, так и траектория не заданы. В процессе движения наблюдается некоторый сигнал, характеризующий фазовое состояние системы. Именно, в дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in T$ $(i = 1, 2, \ldots)$ измеряется с ошибкой часть координат системы (1) — координаты $y_2(\tau_i)$. Результаты измерений — векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^{n-n_1}$ — таковы, что

$$\xi_i^h = y_2(\tau_i) + z_i, \quad |z_i| \le \nu_i^h.$$

Здесь $|x|$ — евклидова норма вектора x, $\nu_i^h \in (0, 1)$ — величина ошибки измерения в момент τ_i, число $h \in (0, 1)$ характеризует точность измерения.

Наряду с системой (1) имеется еще одна динамическая система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + Cv(t), \quad t \in T, \quad x(0) = x_0, \tag{2}$$

назовем ее эталонной, которая подвержена влиянию неконтролируемого входного воздействия v. Траектория этой системы x, а также входное воздействие v, априори неизвестны. Известно лишь, что функция $v(t)$ стеснена ограничением

$$v(\cdot) \in Q(\cdot) = \{v(t), t \in T : v(t) \in Q \text{ при п.в. } t \in T\},$$

где $Q \in \mathbb{R}^q$ — заданное выпуклое, ограниченное и замкнутое множество. В моменты τ_i $(i \ge 1)$ измеряется (с ошибкой) состояние $x_2(\tau_i) \in \mathbb{R}^{n-n_1}$ $\quad (x(t) = \{x_1(t), x_2(t)\})$. Результаты измерений — векторы $\psi_i^h \in \mathbb{R}^{n-n_1}$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\psi_i^h - x_2(\tau_i)| \le \nu_i^h.$$

Обсуждаемая задача состоит в построении алгоритма формирования по принципу обратной связи управления $u = u^h(\tau_i, \xi_i^h, \psi_i^h)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, в системе (1), такого, что, во-первых, траектория системы (1), отвечающая этому управлению ($y^h(\cdot) = y(\cdot; y_0, u^h(\cdot))$), останется при всех $t \in T$ в некоторой достаточно малой окрестности решения эталонной системы (2), т. е.

$$\sup_{t\in T} |x(t) - y^h(t)| \leq \nu(h), \quad \nu(h) \to 0 \text{ при } h \to 0,$$

и, во-вторых, управление $u = u^h(\cdot)$ приближает в среднеквадратичном неизвестный вход $v(\cdot)$ на любом конечном промежутке времени, т.е.

$$\|v(\cdot) - u^h(\cdot)\|_{L_2([0,\vartheta];\mathbb{R}^q)} \to 0 \quad \text{при } h \to 0, \quad \forall \vartheta \in T.$$

Таким образом, необходимо сконструировать закон формирования по принципу обратной связи управления u, обеспечивающий близость траекторий имеющихся систем. При этом формируемое по ходу развития процесса управление u должно приблизить в среднеквадратичном неизвестное входное воздействие v эталонной системы.

Сформулированная выше задача относится к классу обратных задач динамического оценивания неизвестных характеристик по результатам измерений. Она, в частности, может быть решена на основе теории динамического обращения [1, 2]. Обратим внимание на тот факт, что предложенные в этих работах алгоритмы решения соответствующих задач обращения ориентированы на конечный промежуток времени функционирования системы $T = [0, \vartheta]$, $\vartheta < +\infty$. Заметим также, что с возрастанием ϑ при реализации описанных в работах [1, 2] алгоритмов происходит “накопление” вычислительных и измерительных ошибок. Именно, с ростом ϑ скорости сходимости алгоритмов ухудшаются. Таким образом, качество алгоритмов, вообще говоря, зависит от величины промежутка времени, на котором функционирует система. В настоящем сообщении нами будет указан алгоритм решения сформулированной выше задачи, “не зависящий” от величины такого промежутка. При этом будет рассмотрен случай, когда матрица A экспоненциально устойчива, а нелинейная часть f системы (1) представляет собой малое возмущение, согласованное с A подходящим образом.

Литература

1. *Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.

2. *В.И. Максимов* Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во Ин-та мат. и мех. УрО РАН, 2000. 305 с.