Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

О некоторых достаточных условиях регуляризуемости интегральных уравнений

Л.Д. Менихес*, О.А. Соколик**

* ЮУрГУ,
пр. Ленина, 76,
454080 Челябинск, Россия
E-mail: men@math.susu.ac.ru

** ЮУрГУ
пр. Ленина, 76,
454080 Челябинск, Россия
E-mail: men@math.susu.ac.ru

Понятие регуляризуемости отображений возникло при приближенном решении уравнений. Большой интерес представляет исследование вопроса о регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам, так как оно связано с возможностью решения интегральных уравнений.

Пусть X и Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ – непрерывный инъективный линейных оператор. Мы будем говорить, что отображение A^{-1} регуляризуемо, если существует семейство отображений $R_\delta : Y \to X, \ \ \delta \in (0, \delta_0)$ такое, что для любого $x \in X$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\|y - Ax\| \le \delta} \|R_\delta y - x\| = 0.$$

Рассмотрим классическую ситуацию $X = C(0,1), \ \ Y = L_2(0,1)$. Будем предполагать, что оператор A непрерывен также и в L_2-норме. Тогда оператор A может быть продолжен по непрерывности на различные линейные подпространства $M, \ C(0,1) \subset M \subset L_2(0,1)$. Нас будут особо интересовать случаи $M = L_p(0,1), \ \ M = \bigcap\limits_{p=2}^{\infty} L_p(0,1), \ \ M = L_\infty(0,1)$. В работе [1] была замечена связь между регуляризуемостью обратных отображений и ядром продолженного оператора. Точнее, в [1] показано, что если продолжение оператора A на некоторое $L_p(0,1), \ p \ge 2$ имеет конечномерное ядро, то отображение A^{-1} регуляризуемо.

Далее в этом направлении в [2] было доказано, что для регуляризуемости отображения A^{-1} достаточна конечномерность ядра продолжения A на $\bigcap\limits_{p=2}^{\infty} L_p(0,1)$, а в [3] этот результат усиливается до следующего. Регуляризуемость A^{-1} следует из конечномерности ядра продолженного на $L_\infty(0,1)$ оператора. Таким образом, мы имеем три достаточных условия регуляризуемости обратных отображений для операторов из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$. Возникает следующий вопрос. Являются ли эти условия различными, если ограничиться интегральными операторами? Или эти условия одновременно дают регуляризуемость интегральных уравнений. В докладе приводятся две теоремы, из которых следует, что указанные три достаточных условия регуляризуемости являются попарно различными, даже если ограничиться интегральными операторами с бесконечно дифференцируемыми ядрами. Отметим, что в [4] получен один частный результат, в котором вместо конечномерности ядра продолженного оператора рассматривается его инъективность.

Теорема 1. *Существует инъективный интегральный оператор из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$ с бесконечно дифференцируемым ядром, продолжение которого по непрерывности на любое $L_p(0,1), \ \ p \ge 2$ имеет бесконечномерное ядро, а ядро его продолжения на $\bigcap\limits_{p=2}^{\infty} L_p(0,1)$ конечномерно.*

Теорема 2. *Существует инъективный интегральный оператор из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$ с бесконечно дифференцируемым ядром, продолжение которого по непрерывности на $\bigcap\limits_{p=2}^{\infty} L_p(0,1)$ имеет бесконечномерное ядро, а продолжение на $L_\infty(0,1)$ имеет конечномерное ядро.*

Список литературы

[1] Менихес Л.Д. О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам // Матем. заметки, 1999, т. 65, № 2, с. 222–229.

[2] Танана В.П., Менихес Л.Д. О регуляризуемости линейных обратных задач в банаховых пространствах // Вестник Челябинского университета. Серия 3. Математика. Механика. Информатика. № 1(6), 2002, с. 38–41.

[3] Менихес Л.Д. О регуляризации неустойчивых задач в пространствах непрерывных функций // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математика, физика, химия", 2003, № 6 (22), с. 9–16.

[4] Баязитова А.А., Менихес Л.Д. Об одном достаточном условии регуляризуемости интегральных уравнений // Математика. Механика. Информатика: Материалы Всероссийской научной конференции 19-22 сентября 2006 г. Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2007, с. 24–28.