Международная конференция "Обратные и некорректные задачи математической физики", посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Решение смешанной задачи для одной модели фильтрации методами Монте-Карло

К.К. Шакенов*, Н.А. Исабекова**

* КазНУ имени аль-Фараби,
ул. Масанчи, 39/47,
050012 Алматы, Казахстан
E-mail: shakenov2000@mail.ru

** Кокшетауский ГУ,
пр. Абая, 76,
000020 Кокшетау, Казахстан
E-mail: nargul2007@mail.ru

Работа первого автора была поддержана ФН МО и Н РК (грант ПФИ 5)

Линейная релаксационная фильтрация в ограниченной области $\Omega \in R^3$ с границей $\partial\Omega$ в момент времени $t \in [0, T]$ описывается законом сохранения импульса сил сопротивления, линеаризованным законом сохранения массы жидкости, соотношениями для импульса сил сопротивления и массы жидкости, то есть следующей замкнутой системой уравнений

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \vec{J}\,d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} p\,\vec{n}\,d(\partial\Omega) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} m\,\rho\,d\Omega + \rho_0\int\limits_{\partial\Omega} W_n\,d(\partial\Omega) = 0, \tag{2}$$

$$\vec{J} = -F(0)\,\vec{W}(x,t) - \int\limits_0^{\infty} \frac{dF(t')}{dt'}\cdot\vec{W}(x,t-t')dt', \tag{3}$$

$$m\,\rho - m_0\,\rho_0 = \Phi(0)\big(p - p_0\big) + \int\limits_0^{\infty} \frac{d\Phi(t')}{dt'}\cdot\big(p - p_0\big)(x,t-t')dt', \tag{4}$$

где $\vec{J}$ – плотность импульса сил сопротивления, p – давление, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$, m – пористость, ρ – плотность жидкости, ρ_0 – плотность жидкости в невозмущенных пластовых условиях, W_n – проекция скорости фильтрации на нормаль $\vec{n}$, m_0 – пористость в невозмущенных пластовых условиях, $\vec{W}$ – вектор скорости фильтрации, p_0 – начальное давление, $F(t)$ и $\Phi(t)$ – ядра релаксации закона фильтрации и массы жидкости соответственно. Из (1) – (4) исключая $\vec{J}$, $m\,\rho$ и для ядер релаксации $F(t) = \dfrac{\mu}{\kappa}\,(t+\tau)\,\eta(t)$, $\Phi(t) = \rho_0\,\beta\,\eta(t)$ получаем замкнутую систему уравнений относительно давления p и вектор скорости фильтрации $\vec{W}$, то есть модель фильтрации с постоянной скоростью распространения возмущений

$$\chi\,\triangle p(x,t) = \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \tau\,\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}, \tag{5}$$

$$-\frac{\kappa}{\mu}\,\mathrm{grad}\,p(x,t) = \vec{W}(x,t) + \tau\,\frac{\partial\vec{W}(x,t)}{\partial t}, \tag{6}$$

где μ – вязкость жидкости, κ – коэффициент проницаемости, t – время, τ – момент времени, β – коэффициент упругоемкости пласта, $\eta(t)$ – функция Хевисайда, $\eta(t) = 1$ при $t > 0$, $\eta(t) = 1/2$ при $t = 0$, $\eta(t) = 0$ при $t < 0$, $\chi = \dfrac{\kappa}{\mu\,\beta}$ – коэффициент пьезопроводности пласта. [1]

Рассмотрим уравнение (5). Для давления $p(x,t)$ поставим смешанную задачу на границе $\partial\Omega$

$$a(x,t)\,p(x,t) + b(x,t)\,\frac{\partial p(x,t)}{\partial \vec{n}} = p_0(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \tag{7}$$

где $a(x,t)$, $b(x,t)$, $p_0(x,t)$ – заданные на границе $\partial\Omega$ функции. Определим начальные данные

$$p(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad x \in \Omega \tag{8}$$

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad x \in \Omega. \tag{9}$$

Задачу (5), (7) – (9) дискретизируем только по времени $t \in [0,T]$ неявной схемой, $t_j = \triangle t \cdot j$, $j = 0, 1, \ldots, j_0$, $\triangle t = T/j_0 > 0$, $\triangle t$ – шаг по t. Тогда получим следующую задачу на временном слое $j+1$

$$\triangle p^{j+1}(x) - c\,p^{j+1}(x) = f^j(x), \quad x \in \Omega, \tag{10}$$

где $c = \dfrac{\triangle t + 2\tau}{2(\triangle t)^2} > 0$, $f^j(x) = -\dfrac{t\tau}{2(\triangle t)^2} \cdot p^j(x) + \dfrac{\triangle t + 2\tau}{2(\triangle t)^2} \cdot p^{j-1}$. А из (8) и (9) соответственно получим

$$p^0(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{11}$$

$$p^1(x) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{12}$$

Граничное условие (7) примет вид

$$a^{j+1}(x)\,p^{j+1}(x) + b^{j+1}(x)\,\big(\nabla \cdot d(\partial\Omega)\big)\,p^{j+1}(x) = p_0^{j+1}(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{13}$$

Алгоритм "блуждания по сферам". Рассмотрим задачу (10) – (13) для временного слоя $j+1$. Цепь Маркова строится "блужданиями по сферам"как в случае решения задачи Дирихле. Но при достижении "частицы" $\partial\Omega$–границы области Ω, "частица" поглощается или отражается с одинаковой вероятностью, равной 1/2. При поглощении "частицы" к счетчику суммируется "вес" граничного узла, равный $\dfrac{p_0(x)}{a(x)}$, а при отражении "частицы" к счетчику суммируется "вес" граничного узла, равный $\dfrac{p_0(x)}{b(x)}$. Во внутренних узлах учитывается "вес" внутреннего узла. Цепь обрывается, если "частица" поглощается. ε–смещенную оценку решения $p_\varepsilon(x)$ задачи (10) – (13) для фиксированного временного слоя $j+1$ в точке x получаем осреднением случайной величины ξ, построенной вдоль траектории цепи случайной длины N, то есть $p_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{M}\xi_i$. [2], [3].

Алгоритм "блуждания по решеткам". Задачу (10) – (13) аппроксимируем методом конечных разностей по x с погрешностью $O(h^2)$, где h – шаг по x. Аппроксимацию области Ω обозначим через ω_h, границы $\partial\Omega$ – через γ_h. Тогда из (10), опуская номер слоя по времени j, $j+1$, получим

$$p(x_i) = \frac{1}{2 + c\,h^2} \cdot p(x_i + e_i\,h) + \frac{1}{2 + c\,h^2} \cdot p(x_i - e_i\,h) - \frac{h^2}{2 + c\,h^2} \cdot f(x_i), \quad x_i \in \omega_h, \tag{14}$$

где e_i – единичный вектор оси x_i. Заметим, что $0 < \dfrac{2}{2 + c\,h^2} \leq 1$ и $\dfrac{2}{2 + c\,h^2} \to 1$ при $h \to 0$. Отсюда следует, что $\alpha(x_i,\, yi,\, \tau,\, \triangle t,\, h) = \dfrac{1}{2 + c\,h^2}$ является переходной вероятностью марковской цепи.

С вероятностью 1/3 разыгрывается координатная ось. Затем с вероятностью α из узла x_i "частица" перемещается по направлению $-e_i$ или $+e_i$ в один из соседних узлов $x_i \pm e_i\,h$. В узлах учитывается "вес" узла, пропорциональный величине $\dfrac{h^2}{2 + c\,h^2} \cdot f(x_i)$. И так далее, пока "частица" не достигнет дискретной границы γ_h. На границе γ_h "частица" с вероятностью 1/2 либо поглощается, либо отражается. При

поглощении цепь обрывается, и к счетчику суммируется "вес" поглощающего граничного узла — $\dfrac{p_0(x_i)}{b(x_i)}$, а при отражении — $\dfrac{p_0(x_i)}{a(x_i)}$. Таким образом вдоль дискретной цепи Маркова случайной длины N_h определяется случайная величина $\xi^h_{N_h}$. Оценка решения $p_h(x_i)$ определяется из соотношения $p_h(x_i) = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{M}\left(\xi^h_{N_h}\right)_i$, где M – количество траектории цепи, исходящих из узла x_i. [4], [5].

Вероятностно–разностный метод. Пусть $p_0(x)$ – действительная ограниченная непрерывная функция на $\partial\Omega$. Через γ^R_h обозначим множество "отражающих" граничных узлов, а через γ^A_h – множество "поглощающих" граничных узлов. α также дает переходные вероятности цепи ξ^h_i в ω_h. Цепь обрывается при первом соприкосновении с γ^A_h. Тогда $\mathbf{E}\Big\{\xi^h_{i+1} - \xi^h_i|\xi^h_i = y_i \in \gamma^R_h\Big\} = \frac{\upsilon(y)\,h}{|\upsilon(y)|}$. Это показывает, что "частица" отражается от граничного узла γ^R_h в направлении $\upsilon(y)$, где $\upsilon(y)$ – направление попадания во внутренний узел. Определим $A^h_n = \prod\limits_{i=0}^{n}\exp\big(-c(\xi^h_i)\cdot\delta t^h_i\cdot I_{\omega_h}(\xi^h_i)\big)$, $C^h_n = \prod\limits_{i=0}^{n}\exp\big(-b(\xi^h_i)\cdot d\phi^h_i\big)$, $D^h_n = A^h_n\cdot C^h_n$. Здесь δt^h_i – параметр процесса ξ^h_i; $d\phi^h = \frac{h}{|\upsilon(x)|}$, $d\phi^h_i = d\phi(\xi^h_i)\cdot I_{\gamma^R_h}(\xi^h_i)$. Для случайной цепи длины $N_h = \min\{n : \xi^h_n \in \gamma^A_h\}$ получим единственное дискретное приближение решения задачи на временном слое $j+1$

$$p_h(x_i) = \mathbf{E}\Big\{\sum_{i=0}^{N_h-1} D^h_i\cdot f(\xi^h_i)\cdot\delta t^h_i\cdot I_{\omega_h}(\xi^h_i) + D^h_{N_h-1}\cdot a(\xi^h_{N_h}) + \sum_{i=0}^{N_h-1} D^h_i\cdot p_0(\xi^h_i)\cdot d\phi^h_i\Big\}.$$

[6], [7], [8].

Список литературы

[1] *Молокович Ю.М., Осипов П.П.* Основы теории релаксационной фильтрации. Казань, Издательство Казанского университета, 1987, 106 с.

[2] *Елепов Б.С., Кронберг А.А., Михайлов Г.А., Сабельфельд К.К.* Решение краевых задач методами Монте–Карло. Новосибирск, Наука, 1980, 174 с.

[3] *Ермаков С.М., Некруткин В.В., Сипин А.С.* Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. Наука, Москва, 1984. 205 с.

[4] *Шакенов К.К.* Дисперсия оценки решения системы линеаризованных возмущенных разностных уравнений Навье–Стокса. Вычислительные технологии. 2002. Том 7, є 3, Новосибирск, 2002. С. 93 – 97.

[5] *Шакенов К.К.* Решение задач релаксационной фильтрации методами Монте–Карло. Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ–2000), посвященный памяти М.А. Лаврентьева. Тезисы докладов. Часть 2. Новосибирск, Издательство Института Математики, 2000.

[6] *A. Haji–Sheikh and E.M. Sparrow.* The floating random walk and its application to Monte Carlo solutions of heat equations. J. SIAM Appl. Math. Vol. 14, No. 2, March, 1966. Printed in U.S.A. P. 370–389.

[7] *Кушнер Г. Дж.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985, 222 с.

[8] *Шакенов К.К.* Решение задачи Неймана для уравнения Гельмгольца методами Монте–Карло. Международная конференция по Вычислительной Математике, МКВМ–2004, Часть 1, Новосибирск, 2004. С. 333–334.