Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Оптимальные методы решения экспоненциально некорректных задач

С.Г. Солодкий*, **А.В. Мосенцова***

* ИМ НАНУ,
ул. Терещенковская, 3,
01601 Киев, Украина
E-mail: solodky@imath.kiev.ua
annam@ukr.net

Рассмотрим задачу приближенного решения линейной некорректной задачи, представимой в виде

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A является линейным компактным инъективным оператором, действующим из гильбертова пространства X в гильбертово пространство Y. Обозначим скалярные произведения в этих пространствах через $(\cdot,\cdot)$ и соответствующие им нормы через $\|\cdot\|$. Более того, символом $\|\cdot\|$ обозначим также стандартную операторную норму. По контексту будет понятно, какое пространство или норма имеются ввиду. Будем считать, что вместо y доступно приближение y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Обычно (1) называют строго некорректной задачей, если его решение $x_0 = A^{-1}y$ имеет конечную гладкость в некотором смысле, а A является оператором бесконечной гладкости. Примером такого рода задач служат экспоненциально некорректные задачи. Отличительной чертой последних задач является то, что x_0 принадлежит некоторому подпространству V, непрерывно вложенному в X, а сингулярные значения оператора канонического вложения J_v из V в X стремятся к нулю с полиномиальной скоростью, в то время как собственные значения $\{\sigma_l\}_{l=1}^{\infty}$ оператора A стремятся к нулю достаточно быстро таким образом, что при некоторых константах $\bar{c} \ge \underline{c} > 0$ и при любых $l = 1, 2, \ldots$ выполняется $\underline{c}\exp(-\exp\ldots\exp l^r) \le \sigma_l \le \bar{c}\exp(-\exp\ldots\exp l^r)$, где функция exp фигурирует $K \ge 1$ раз. Следуя [1], [2, гл. 2, § 1], в данном случае естественно предположить, что

$$x_0 \in M_{p,\rho}^{\log}(A) := \{x : x = (\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\ \text{раз}}(A^*A)^{-1})^{-p}v, \quad \|v\| \le \rho\} \tag{2}$$

при некоторых $p > p_0$ и $\rho > 0$, где операторная функция $(\ln\ldots\ln(A^*A)^{-1})^{-p}$ корректно задана спектральным разложением

$$A^*A = \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l^2 (\Psi_l, \cdot)\Psi_l$$

оператора A^*A, то есть

$$(\ln\ldots\ln(A^*A)^{-1})^{-p}v = \sum_{l=1}^{\infty} (\ln\ldots\ln\sigma_l^{-2})^{-p}(\Psi_l, v)\Psi_l.$$

Исследования строго некорректных задач берут свое начало с работы [3], где были найдены оценки точности тихоновского метода регуляризации уравнений (1) с операторами как конечной, так и бесконечной гладкости. Методы регуляризации экспоненциально некорректных задач рассматривались в [4], где, в частности, был предложен алгоритм решения (1) в случае неточно заданных оператора и правой части, использующий модификацию метода апостериорного выбора параметра регуляризации

из [5]. В работе [6] был предложен метод решения строго некорректных задач (1) с решениями (2) при $K = 1$, суть которого заключается в сочетании метода обыкновенной тихоновской регуляризации с принципом невязки Морозова. Указанная комбинация позволила достичь оптимальную по порядку в логарифмической шкале точность $O(\ln^{-p}\frac{1}{\delta})$ восстановления решений из указанного множества для любого $p > p_0$. Затем в работе [7] был предложен адаптивный метод выбора параметра регуляризации при общих условиях истокопредставимости решения уравнения (1). Адаптивные стратегии выбора параметра дискретизации обсуждались также и в работах [8], [9]. В работе [2] изучалось поведение регуляризаторов уравнения (1) с решениями вида (2) для любых $K \in \mathbb{N}$, когда оператор A в (1) самосопряженный. Цель данной работы состоит в продолжении исследований [6] на случай экспоненциально некорректных задач с решениями (2) при любом $K = 1, 2, \ldots$. А именно, будет установлено, что комбинация дискретизированной тихоновской регуляризации с морозовским принципом невязки обеспечивает оптимальный порядок точности $O((\ln\ldots\ln\frac{1}{\delta})^{-p})$ на указанном классе уравнений.

Любая численная реализация тихоновского метода требует выполнения всех вычислений с конечномерным приближением A_n вместо A. Обычно вариационная задача $I_\alpha(x) \to \min$ заменяется на конечномерный аналог

$$I_{\alpha,n}(x) := \|A_n x - y_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min,$$

где A_n – некоторое конечномерное приближение с $\operatorname{rank}(A_n) = n$. Тогда вычисление приближения $x^\delta_{\alpha,n}$ для $x_0 = A^{-1}y$ требует решения линейного операторного уравнения

$$\alpha x + A_n^* A_n x = A_n^* y_\delta.$$

Пусть конечномерное приближение A_n выбрано так, чтобы выполнялось

$$\|A - A_n\| \le \delta\rho^{-1}. \tag{3}$$

Следуя [5], рассмотрим принцип невязки Морозова в форме, приспособленной к конечномерному варианту обыкновенной тихоновской регуляризации.

Параметр регуляризации α будем выбирать из конечного упорядоченного множества

$$\Delta_q(\delta) = \{\alpha : \alpha = \alpha_m := \alpha_0 q^m, \quad m = 0, 1, \ldots, \quad \alpha \in (\delta^2, \alpha_0), \quad q \in (0, 1)\}. \tag{4}$$

А именно, вычисляем $x^\delta_{\alpha_m,n} = (\alpha_m I + A_n^* A_n)^{-1} A_n^* y_\delta$ путем решения

$$\alpha_m x + A_n^* A_n x = A_n^* y_\delta, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

до тех пор, пока не выполнится

$$\|A_n x^\delta_{\alpha_m,n} - y_\delta\| \le d_0\delta, \tag{5}$$

где $d_0 \ge \frac{\rho}{M_K} + \frac{9}{4}$. При этом без потери общности предполагаем, что $\|y_\delta\| > d_0\delta$.

Теорема 1 *Пусть $\|A\| \le M_K$ и $x_0 = A^{-1}y \in M^{\log}_{p,\rho}(A)$. Если n и $\alpha = \alpha_m \in \Delta_q\delta)$ выбраны согласно (3) и (5) соответственно, то*

$$\|x_0 - x^\delta_{\alpha_m,n}\| \le c_0(\ln\ldots\ln\frac{1}{\delta})^{-p},$$

где константа c_0 зависит от p, ρ, M_K, q, d_0.

Замечание 1 *Тем самым в теореме 1 установлено, что предложенный выше подход к решению экспоненциально некорректных задач обеспечивает наилучший возможный порядок точности $O((\ln\ldots\ln\frac{1}{\delta})^{-p})$ на множестве решений (2) без какой бы то ни было информации о p.*

При $K = 1$ найдено обобщение описанного выше результата на случай неточно заданного оператора в исходном уравнении, то есть когда вместо A доступен возмущенный оператор A_h, $\|A - A_h\| \le h$, где $A_h : X \to Y$ - линейный компактный инъективный оператор. Тогда условие истокопредставимости (2) запишется следующим образом

$$x_0 \in M_{p,\rho}^{\log}(A) := \{x : x = \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v, \quad \|v\| \le \rho\} \tag{6}$$

при некоторых $p > p_0, \quad \rho > 0$, где

$$\ln^{-p}(A^*A)^{-1}v = \sum_{l=1}^{\infty} \ln^{-p} \sigma_l^{-2}(\Psi_l, v)\Psi_l.$$

Без потери общности будем считать, что $\|A\| \le \theta \le e^{-1/2}$, то есть $\sigma_l \le \theta \le e^{-1/2}, \quad l = 1, 2, \ldots$.

Вариационная задача в этом случае принимает вид

$$I_{\alpha,n}(x) := \|A_{h,n}x - y_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min,$$

где $A_{h,n}$ – некоторое конечномерное приближение с $\mathrm{rank}(A_{h,n}) = n$. Вычисление приближения $x_{\alpha,n}^{\delta,h}$ для $x_0 = A^{-1}y$ требует в этой ситуации решения линейного операторного уравнения

$$\alpha x + A_{h,n}^* A_{h,n} x = A_{h,n}^* y_\delta.$$

Пусть вначале $h \ge \delta > 0$. Тогда конечномерное приближение выберем таким образом, чтобы

$$\|A_h - A_{h,n}\| \le h. \tag{7}$$

Отсюда

$$\|A - A_{h,n}\| \le \|A - A_h\| + \|A_h - A_{h.n}\| \le 2h.$$

Параметр регуляризации α будем выбирать из конечного упорядоченного множества (4) с правилом останова согласно обобщенному принципу невязки [10]. Другими словами, вычисляем $x_{\alpha_m,n}^{\delta,h} = (\alpha_m I + A_{h,n}^* A_{h,n})^{-1} A_{h,n}^* y_\delta$ путем решения

$$\alpha_m x + A_{h,n}^* A_{h,n} x = A_{h,n}^* y_\delta, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

до тех пор, пока не выполнится

$$\|A_{h,n} x_{\alpha_m,n}^{\delta,h} - y_\delta\| \le d_0(\delta + h). \tag{8}$$

где $d_0 = \eta \max\{\theta^{-1}\rho + 1, \frac{5}{2}\rho\}$, $\eta > 1$.

Теорема 2 *Пусть* $\|A\| \le \theta \le e^{-1/2}$ *и* $x_0 = A^{-1}y \in M_{p,\rho}^{\log}(A)$. *Если* n *и* $\alpha = \alpha_m \in \Delta_q(\delta)$ *выбраны согласно (7) и (8), соответственно, то*

$$\|x_0 - x_{\alpha_m,n}^{\delta,h}\| \le c_1 \ln^{-p} \frac{1}{h},$$

где константа c_1 *зависит от* p, ρ, θ, q, d_0.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < h \le \delta$. Пусть конечномерное приближение выбрано таким образом, что

$$\|A_h - A_{h,n}\| \le \delta\rho^{-1}. \tag{9}$$

Тогда

$$\|A - A_{h,n}\| \le \|A - A_h\| + \|A_h - A_{h.n}\| \le h + \delta\rho^{-1}.$$

Как и ранее, параметр регуляризации α выбирается из (4) с правилом останова согласно обобщенному принципу невязки. А именно, вычисляем $x^{\delta,h}_{\alpha_m,n} = (\alpha_m I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n}y_\delta$ путем решения

$$\alpha_m x + A^*_{h,n}A_{h,n}x = A^*_{h,n}y_\delta, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

до тех пор, пока не выполнится условие (8), где $d_0 = \theta^{-1}\rho + \frac{9}{4}$.

Теорема 3 *Пусть $\|A\| \le \theta \le e^{-1/2}$ и $x_0 = A^{-1}y \in M^{\log}_{p,\rho}(A)$. Если n и $\alpha = \alpha_m \in \Delta_q(\delta)$ выбраны согласно (9) и (8), соответственно, то*

$$\|x_0 - x^{\delta,h}_{\alpha_m,n}\| \le c_2 \ln^{-p}\frac{1}{\delta},$$

где константа c_2 зависит от p, ρ, θ, q, d_0.

Замечание 2 *Как известно, при решении уравнений (1) с решениями из множества*

$$M_{p,\rho}(A) := \{u : u = |A|^p v, \|v\| \le p\}$$

в рамках стандартного метода Тихонова с правилом останова согласно принципу невязки Морозова оптимальный порядок точности $O(\delta^{p/(p+1)})$ достигается при $0 < p \le 1$. А при $p > 1$ порядок точности решения остается равным $O(\delta^{1/2})$, то есть наступает насыщение. В то же время при решении строго некорректных задач подобного эффекта удается избежать. Впервые этот факт был установлен в работе [6] в случае точно заданного оператора с решениями вида (6) и обобщен на случай решений вида (2) в теореме 1. Теоремы 2 и 3 показывают, что данный результат распространяется и на случай, когда возмущены и оператор, и правая часть уравнения (1).

Список литературы

[1] М.Ю. Кокурин, Н.А. Юсупова, *О необходимых и достаточных условиях медленной сходимости методов решения линейных некоректных задач*, Изв. вузов. Математика, 2(477), 2002, с. 81-84.

[2] А.Б. Бакушинский, М.Ю. Кокурин, *Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами*, М.:Едиториал УРСС, 2002, 192 с.

[3] B.A. Mair, *Tikhonov regularization for finitely and infinitely smoothing operators*, SIAM J. Math. Anal., 25, 1994, pp. 135-147.

[4] T. Hohage, *Regularization of exponentially ill-posed problems*, Numer. Funct. Anal. Optim., 21, 2000, pp. 439-464.

[5] R. Plato, G. Vainikko, *On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems*, Numer. Math., 57, 1990, pp. 63-79.

[6] E. Schock, S. Pereverzev, *Morozov's discrepancy principle for Tikhonov regularization of severely ill-posed problems in finite-dimensional subspaces*, Numer. Funct. Anal. Optim., 21, 2000, pp. 901-916.

[7] H. Cao, S. Pereverzev, *Natural linearization for the identification of a diffusion coefficient in a quasi-linear parabolic system from short-time observations*, Inverse problems, 22, 2006, pp. 2311-2330.

[8] P. Mathe, S. Pereverzev, *The discretized discrepancy principle under general source conditions*, J. Complexity, 22(3), 2006, pp. 371-381.

[9] P. Mathe, S. Pereverzev, *Discretization strategy for linear ill-posed problems in variable Hilbert scales*, Inverse Problems, 19(6), 2003, pp. 1263-1277.

[10] А.В. Гончарский, А.С. Леонов, А.Г. Ягола, *Обобщенный принцип невязки,* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, 13(2), с. 294-302.