Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

О решении граничной обратной задачи для полулинейного параболического уравнения

Е.В.Табаринцева*

* Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина, 76,
454080 Челябинск, Россия
E-mail: ev_tab@math.susu.ac.ru

Работа поддержана РФФИ (проект р_ урал_ а 07-01-96001)

Рассмотрим задачу определения граничного условия $u_0(t) = u(0,t)$, где $u(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u) \quad (0 < x < 1; \quad t > 0) \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0; \quad u(1,t) = h(t); \quad u_x(x_0,t) = g(t) \quad (0 < x_0 < 1).$$

Здесь $h, g \in L_2[0,\infty)$ - заданные функции, $F : L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty)$ - удовлетворяет условию Липшица

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_{L_2[0,\infty)} \leq L\|u_1 - u_2\|_{L_2[0,\infty)}.$$

Задача (1) поставлена некорректно. Так как функция $f(t) = u(x_0,t)$ может быть определена при решении стандартной смешанной краевой задачи на отрезке $[x_0, 1]$, без ограничения общности можем рассмотреть задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u) \quad (0 < x < 1; \quad t > 0) \tag{1'}$$

$$u(x,0) = 0; \quad u(x_0,t) = f(t); \quad u_x(x_0,t) = g(t) \quad (0 < x_0 < 1).$$

Пусть вместо точных значений $f(t)$ и $g(t)$ известны $\delta-$ приближения f_δ и g_δ и уровень погрешности δ такие, что $\|f_\delta - f\| < \delta; \quad \|g_\delta - g\| < \delta$. Для построения устойчивого приближенного решения задачи (1’) рассмотрим вспомогательную задачу для гиперболического уравнения с малым параметром

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0; \quad u(x_0,t) = f_\delta(t); \quad u_x(x_0,t) = g_\delta(t).$$

Здесь $\varepsilon > 0-$ постоянная времени (время релаксации теплового напряжения, см. [1]). В качестве приближенного решения задачи (1) будем рассматривать функцию

$$\overline{u}(t) = u_\delta^\varepsilon(0,t), \tag{3}$$

где $u_\delta^\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет условиям (2) и зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ выбрана из условия минимальности погрешности полученного приближенного решения. Показано, что погрешность приближенного решения (3) на множестве $M = \{u_o(t) : \|u_0\|^2_{L_2[0,\infty)} + \|u_0'\|^2_{L_2[0,\infty)} \leq r^2\}$ имеет при $\delta \to 0$ порядок

$$\Delta \simeq \frac{1}{\ln^2(r/\delta)}$$

1.Н.М.Беляев, А.А.Рядно. Методы теории теплопроводности. М., Высшая школа, 1982.