Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Об оптимальных по порядку методах приближения кусочно - непрерывного решения одной обратной задачи

В.П. Танана *, **М.Г. Булатова** **

* **ГОУ ВПО "ЧелГУ",**
ул. Братьев Кашириных, 129,
454021 Челябинск, Россия
E-mail: tanana@csu.ru

** **ТФ ГОУ ВПО "ЧелГУ",**
ул. Разина, 9,
457100 Троицк,Челябинская обл., Россия
E-mail: bulatovamg@rambler.ru

Работа авторов поддержана грантом р-урал-а 07-01-96001

Рассмотрено дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \quad x \in [0,1], \quad t \geq 0 \tag{1}$$

и предположим, что

$$u(x,0) = 0, \ x \in [0,1] \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{3}$$

$$u(x_0,t) = \varphi(t), \quad 0 < x_0 < 1, \quad t \geq 0 \tag{4}$$

а граничное значение

$$u(1,t) = u(t), \quad t \geq 0 \tag{5}$$

требуется определить.

Предполагаем, что точное решение $u_0(t)$ задачи (1)-(5) принадлежит пространству $W_2^\beta[0,\infty], 0 < \beta < \frac{1}{2}$ и является кусочно непрерывной функцией. Кроме того, предполагаем, что $u_0(t) \neq 0$ и существует $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \geq t_0$ $u_0(t) = 0$, а на отрезке $[0,t_0]$ существует разбиение $(\overline{T})$ $0 = \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < ... < \bar{t}_m = t_0$, для которого выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{(\bar{t}_{i-1},\bar{t}_i)} [u_0'(\tau)]^2 d\tau + \|u_0\|^2_{W_2^\beta[0,t_0]} \leq r_1^2,$$

где величина r_1 предполагается известной, а

$$\int\limits_{(\bar{t}_{i-1},\bar{t}_i)} [u_0'(\tau)]^2 d\tau = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\bar{t}_{i-1}+\varepsilon}^{\bar{t}_i-\varepsilon} [u_0'(\tau)]^2 d\tau$$

Вместо $\varphi_0(t)$ нам известно некоторое приближение $\varphi_\delta(t) \in C^1[0,\infty) \cap L_2[0,\infty)$, удовлетворяющее условиям $\varphi_\delta(0) = 0$ и

$$\int\limits_0^\infty [\varphi_\delta(t) - \varphi_0(t)]^2 dt \leq \delta^2$$

Требуется по исходным данным $(\varphi_\delta, \delta, r_1)$ определить приближчное решение $u_\delta(t)$ задачи (1)-(5) и оценить равномерное уклонение этого решения от точного на участках непрерывности последнего.

Предложен оптимальный по порядку метод решения поставленной задачи, а также получены точные по порядку оценки погрешности этого метода на участках непрерывности точного решения.