Международная конференция "Обратные и некорректные задачи математической физики",
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Устойчивая аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач

В.В.Васин

ИММ УрО РАН,
ул. С. Ковалевской 16,
620219 Екатеринбург, Россия
E-mail: vasin@imm.uran.ru

Работа была поддержана РФФИ (грант 06-01-00116)

В последнее время задача устойчивой высокоточной аппроксимации негладких решений некорректных задач привлекает внимание многих исследователей [1-6]. В непоследнюю очередь это связано с тем, что часто в прикладных исследованиях приходится иметь дело с задачами, решения которых содержат различного рода особенности: изломы, близкие экстремумы, δ-образные формы, разрывы. Как правило, эти особенности несут очень важную информацию об искомом объекте, поэтому в этой ситуации очень важно детально восстановить решение, сохранив ее характерные свойства.

Хорошо известно, что классическая тихоновская регуляризация $n-$го порядка обеспечивает высокое качество аппроксимации для достаточно гладкого решения, однако не позволяет с высокой точностью восстанавливать недифференцируемые решения. Можно сказать, что традиционная тихоновская регуляризация просто не предназначена для устойчивой аппроксимации негладких (разрывных) решений некорректных задач. Это обусловлено тем, что стабилизирующие функционалы, содержащие норму пространства Соболева $W_2^n(D)$, обладают сильным регуляризующим эффектом, что приводит к "заглаживанию"решения и в конечном итоге к потере "тонкой структуры"решения. Поэтому возникла необходимость в построении новых классов стабилизирующих функционалов, специально приспособленных к восстановлению негладких решений.

В этом качестве хорошо зарекомендовали себя стабилизаторы с вариациями различных типов, в частности, с обобщенной вариацией [1,3]

$$\Omega(u) = \sup\{\int_D u(x)\ div\ \ v(x)\, dx : \quad v \in C_0^1(D, R^n), \quad |v(x)| \leqslant 1\}, \tag{1}$$

которые позволяют установить сходимость регуляризованных решений в пространстве $L_p(D)$ вместе со сходимостью вариаций. Причем, в одномерном случае этот результат удается усилить и доказать кусочно-равномерную сходимость прибдиженных решений [6].

Чтобы получить равномерную аппроксимацию непрерывного, но в общем случае, недифференцируемого решения, были предложены стабилизаторы вида [5]

$$\Omega(u) = \max_{x\in D}|u(x)| + \sup_{x_1,x_2\in D}\frac{|u(x_1)-u(x_2)|}{|x_1-x_2|^\mu}, \quad 0<\mu<1, \tag{2}$$

где параметр μ может выбираться в зависимости от гладкости решения. Более того, численные эксперименты показали, что при малых значения параметра μ ($\mu = 0.005$) метод регуляризации с таким стабилизатором вполне удовлетворительно восстанавливает разрывные решения одномерного интегрального уравнения Фоедгольма первого рода.

Использование в качестве стабилизатора нормы пространства Соболева с дробными производными (см. [5])

$$|u\|^p = \int_D |u(x)|^p\, dx\, + \sum_{i=1}^n \int_D |D^{\gamma_i}_{a_i+0} u(x)|^p\, dx,$$

где $D_{a_i+0}^{\gamma_i}-$ частная левосторонняя производная Римана-Лиувилля порядка γ_i, $0 < \gamma_i < 1$, может оказаться целесообразным как для непрерывных, так и разрывных решений в зависимости от выбора вектора $\gamma_i = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$.

Для решения задач минимизации тихоновского функционала с недифференцируемыми стабилизаторами (1), (2) (после их конечномерной аппроксимации) привлекаются итерационные процессы субградиентного типа и обосновывается возможность их использования.

В докладе обсуждаются вопросы сходимости регуляризованных по Тихонову приближенных решений и их дискретных аппроксимаций, а также вопросы эффективности алгоритмов негладкой оптимизации.

Литература

[1] Acar R., Vogel C.R. Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems// Inverse Problems. 1994. Vol. 10. P. 1217-1229

[2] Леонов А.С. Кусочно-равномерная регуляризация двумерных некорректных задач с разрывными решениями: численный анализ. Журн. вычисл. математики и мат. фмзики. 1999. Т. 39, N 12. С. 1939-1944.

[3] Neubauer A. Estimation of discontinuous solutios of ill-posed problems via adaptive grid regularization// J. Inv. Ill-Posed Problems. 2005. Vol. 14, No 7. P. 705-716.

[4] Васин В.В. Регуляризация и дискретная аппроксимация некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации// Доклады РАН. 2001. Т. 376, N 1. С. 11-14.

[5] Васмн В.В. Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач// Труды института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, N 1. С. 64-77.

[6] Vasin V.V., Korotkii M.A. Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing funtionals// J. Inv. Ill- Posed Problems (to appear).