Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Оценка модуля непрерывности в одной обратной задаче физики твердого тела

Н.М. Япарова*

* ЮУрГУ,
пр. Ленина, 76,
454080 Челябинск, Россия
E-mail: ddjy@math.susu.ac.ru

При исследовании методов решения обратных задач большое значение имеет модуль непрерывности обратного оператора задачи. В работе получена точная оценка модуля непрерывности для одной обратной задачи физики твердого тела.

Пусть H – гильбертово пространство, $A : H \to H$ – инъективный, линейный, ограниченный оператор,

$$Au = f, \qquad u, f \in H. \tag{1}$$

Оператор A_1 определен соотношениями: $A_1 = A^*A$, спектр $Sp(A_1) = [0, \|A\|^2]$.

Предполагается, что при $f = f_0$ существует точное решение $u_0 \in M_r$, где $M_r = BS_r$, $S_r = \{v : \ v \in H, \ \|v\| \le r\}$, а $B : H \to H$ – линейный, ограниченный оператор и для $B_1 = B^*B$ выполнено соотношение

$$B_1^{1/2} = G(A_1^{1/2}),$$

где функция $G(\sigma)$ - непрерывна, строго возрастает на $[0, \|A\|]$ и $G(0) = 0$.

Вместо f_0 даны некоторое приближение $f_\delta \in H$ и $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$.

Требуется по исходным данным задачи M_r, f_δ и δ определить приближенное решение u_δ уравнения (1) и оценить его уклонение от точного решения.

Определение 1. Семейство непрерывных операторов $\{T_\delta : \ 0 < \delta \le \delta_0\}$ будем называть методом приближенного решения уравнения (1) на множестве M_r, если $\forall \delta \in (0, \delta_0]$ оператор $T_\delta : H \to H$ и

$$T_\delta f_\delta \to u_0 \ \text{ при } \ \delta \to 0$$

равномерно на множестве M_r при условии, что $\|f_\delta - Au_0\| \le \delta$.

Определение 2. Функцию $\Delta(T_\delta)$, $\delta \in (0, \delta_0]$ назовем погрешностью метода $\{T_\delta : \ 0 < \delta \le \delta_0\}$ на множестве M_r, если $\forall \delta \in (0, \delta_0]$

$$\Delta(T_\delta) = \sup_{u, f_\delta} \left\{ \|u - T_\delta f_\delta\| : \ u \in M_r, \ \|Au - f_\delta\| \le \delta \right\}.$$

Рассмотрим модуль непрерывности обратного оператора $\omega_1(\tau, M)$, определяемый соотношением

$$\omega_1(\tau, M_r) = \sup_{u_1, u_2} \left\{ \|u_1 - u_2\| : \ u_1, \ u_2 \in M_r, \ \|Au_1 - Au_2\| \le \tau \right\}.$$

Определение 3. Метод $\{\overline{T}_\delta : \ 0 < \delta \le \delta_0\}$ будем называть оптимальным по порядку на множестве M_r, если $\exists k$ такое, что $\forall \delta \in (0, \delta_0]$

$$\Delta(\overline{T}_\delta) \le k\omega_1(2\delta, M_r).$$

Для решения уравнения (1) применим модифицированный метод проекционной регуляризации, заключающийся в следующем.

В качестве регуляризующего семейства операторов возьмем семейство $\{P_\alpha:\ 0<\alpha\le\|A\|\}$, определяемое формулой

$$P_\alpha f=\int\limits_\alpha^{\|A\|}\sigma^{-2}dE_\sigma A^*f,\quad f\in H,\tag{2}$$

где $\{E_\sigma:\ \sigma\in[0,\|A\|]\}$ – спектральное разложение единицы, порожденное оператором $A_1^{1/2}$.

В дальнейшем приближенное решение u_δ уравнения (1) определим формулой

$$u_\delta=\widehat{T}_\delta f_\delta=\begin{cases}P_{\widehat{\alpha}}f_\delta & \text{при}\ \ \|f_\delta\|>3\|A\|\delta,\\ 0 & \text{при}\ \ \|f_\delta\|\le 3\|A\|\delta,\end{cases}$$

где P_α определен формулой (2),а для выбора параметра регуляризации $\widehat{\alpha}$ по исходным данным (f_δ,δ) используем уравнение

$$\|Au_\delta^\alpha-f_\delta\|^2=9\|A\|^2\delta^2.\tag{3}$$

Теорема 1. *Если $u_0\in M_r$, то*

$$\|\widehat{T}_\delta f_\delta-u_0\|\le 3\|A\|\,\omega_1(2\delta,M_r).$$

Эти результаты были использованы для оценки модуля непрерывности в задаче восстановления энергетического спектра кристалла.

Связь энергетического спектра кристалла с его теплоемкостью описывается интегральным уравнением первого рода

$$\int\limits_0^\infty S\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)\frac{\varepsilon}{\theta}\,n(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{C(\theta)}{\theta},\tag{4}$$

где $S(x)=x^2/2\,\mathrm{sh}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $C(\theta)$ – теплоемкость системы, $\theta=kT$, T – абсолютная температура, а k – константа, определяемая системой, $n(\varepsilon)$ – спектральная плотность, $C(\theta)/\theta, n(\varepsilon)\in L_2[0,\infty)$ и

$$\int\limits_0^\infty\frac{n_0(\varepsilon)^2}{\varepsilon}\,d\varepsilon+\int\limits_0^\infty[n_0'(\varepsilon)]^2\varepsilon\,d\varepsilon\le r^2.$$

.

Вместо $C_0(\theta)$ известны приближения $C_\delta(\theta)$ и уровень погрешности $\delta>0$ такие, что

$$\|\frac{C_0(\theta)}{\theta}-\frac{C_\delta(\theta)}{\theta}\|\le\delta.$$

Сделав замену переменных в уравнении (4) $\varepsilon=e^\xi$ и $\theta=e^\tau$, получим

$$A\varphi=\int\limits_{-\infty}^\infty k(\tau-\xi)\varphi(\xi)\,d\xi=f(\tau),\tag{5}$$

где точное решение $\varphi_0(\xi)\in W_2^1(-\infty,\infty)$.

Применим к уравнению (5) преобразование Фурье. Тогда операторное изображение задачи примет вид

$$\overline{A}\Phi=\sqrt{2\pi}K(p)\Phi(p)=F(p),$$

где $\Phi(p)$ - фурье-образ решения, $F(p)$- фурье-образ функции $f(\tau)$.

Используя метод проекционной регуляризации приближенное решение $\varphi_\delta(\xi)$ определим формулой

$$\varphi_\delta(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |K(p)|^{-1} F_\delta[p, \widehat{\alpha}(\delta)] e^{ip\xi}\, dp,$$

где функция $F_\delta[p, \widehat{\alpha}(\delta)]$ определена следующим образом.

$$F_\delta[p, \widehat{\alpha}(\delta)] = \begin{cases} F_\delta(p), & \text{при} \quad |p| \le \widehat{\alpha}(\delta), \\ 0, & \text{при} \quad |p| > \widehat{\alpha}(\delta). \end{cases}$$

Параметр $\widehat{\alpha}(\delta)$ удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_{-\infty}^{-\widehat{\alpha}(\delta)} |F_\delta(p)|^2\, dp + \int\limits_{\widehat{\alpha}(\delta)}^{+\infty} |F_\delta(p)|^2\, dp = 9\|A\|^2\delta^2.$$

Для модуля непрерывности обратного оператора получена точная по порядку оценка

$$\|\varphi_\delta - \varphi_0\| \le l \ln^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right), \quad l = const.$$

Из теоремы 1 следует оптимальность по порядку примененного метода проекционной регуляризации на соответствующем классе корректности.

Литература

1. Лифшиц И.М. Об определении энергетического спектра бозе-системы по ее теплоемкости //ЖЭТФ, 1954, т. 26, N5, с. 551–556.

2. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи //Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999, 702 с.

3. Танана В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации. //Сиб. журн. инд. матем., 2004, т. 7, N7, с. 117–132.