Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Численное решение обратной задачи электрокардиографии на основе метода регуляризации Тихонова

А.М. Денисов*, **Е.В. Захаров***, **А.В. Калинин***, **В.В. Калинин****

* МГУ им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы,
119991, Москва, Россия.
E-Mail: den@cs.msu.su
zspec@cs.msu.su
akalinin@sc-labs.ru

** НЦССХ им. А.Н. Бакулева РАМН,
Рублевское шоссе, 135,
121552, Москва, Россия.
E-mail: vitkv@list.ru

Обратная задача электрокардиографии [1] заключается в гармоническом продолжении потенциала электрического поля сердца от поверхности торса на подобласти грудной клетки, где отсутствуют первичные источники электрического поля. Из биофизических соображений следует, что гармоническое продолжение всегда возможно до эпикардиальной (внешней) поверхности и, в определенных случаях, до глубже расположенных внутрисердечных структур.

Обратная задача электрокардиографии является математической основой важного метода медицинской диагностики, концептуально близкого к компьютерной томографии, позволяющего по данным регистрации многоканальной ЭКГ на поверхности тела численно реконструировать электрофизиологические процессы в сердечной мышце. В настоящее время такую информацию, необходимую для хирургического лечения аритмий, приходится получать инвазивным путем при катетеризации сердца и непосредственной регистрации комплекса внутрисердечных электрограмм.

Рассмотрим математическую постановку данной задачи в предположении, что поверхность грудной клетки замкнута и на ней всюду известен потенциал электрического поля сердца, а нормальная производная потенциала равна нулю.

Пусть Ω – область в пространстве R^3, ограниченная снаружи замкнутой поверхностью S_1, а изнутри замкнутой поверхностью S_2. Поверхности S_1 и S_2 предполагаются достаточно гладкими. Требуется найти функцию $u(x, y, z)$ такую, что

$$\Delta u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega \tag{1}$$

и

$$u(x, y, z) = U(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S_1 \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in S_1 \tag{3}$$

Эта задача известна как задача Коши для уравнения Лапласа. Задача Коши для уравнения Лапласа является классическим примером некорректно поставленной задачи. Ее решение единственно, но неустойчиво относительно исходных данных.

В данной работе рассматривается численный алгоритм решения задачи Коши для уравнения Лапласа (1)-(3) в трехмерной области, основанный на методе регуляризации Тихонова [2].

Рассмотрим смешанную краевую задачу:

$$\Delta u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega \tag{4}$$

$$u(x, y, z) = v(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S_2 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in S_1 \tag{6}$$

Обозначим решение этой задачи для заданной функции $v(x, y, z), (x, y, z) \in S_2$ через $u(x, y, z; v)$. Задача (4)-(6) определяет оператор A, отображающий потенциал v на поверхности S_2 в потенциал на поверхности S_1:

$$Av \equiv u(x, y, z; v), \quad (x, y, z) \in S_1 \tag{7}$$

Тогда задача (1)-(3) может быть сформулирована как задача решения операторного уравнения первого рода:

$$Av = U(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S_1 \tag{8}$$

Применим для ее решения метод регуляризации Тихонова [2]. Пусть для точных значений $\bar{U}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in S_1$ существует точное решение уравнения (8) $\bar{v}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in S_2$, но $\bar{U}(x, y, z)$ неизвестна, а задано ее приближение $U_\delta(x, y, z)$, $(x, y, z) \in S_1$ такое что, $\|U_\delta - \bar{U}\|_{L_2(S_1)} \le \delta$. Требуется, зная $U_\delta(x, y, z)$ и величину погрешности δ, построить приближенное решение $v_\delta(x, y, z)$.

Рассмотрим функционал

$$M^\alpha[v] = \|Av - U_\delta\|^2_{L_2(S_1)} + \alpha\|v\|^2_{L_2(S_2)}, \quad \alpha > 0 \tag{9}$$

Приближенное решение v_α определяется как элемент, реализующий минимум функционала $M^\alpha[v]$, в котором параметр регуляризации α должным образом зависит от величины погрешности δ, т.е. $\alpha = \alpha(\delta)$.

Приближенное решение v_α может быть найдено как прямыми методами численной оптимизации, так и из уравнения

$$\alpha v + A^* A v = A^* U_\delta \tag{10}$$

представляющего собой необходимое условие минимума функционала (9). Оператор A^* отображает функцию $g(x, y, z)$, заданную на поверхности S_1, в функцию, заданную на поверхности S_2 и определяется следующей смешанной задачей:

$$\Delta w(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega \tag{11}$$

$$w(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in S_2 \tag{12}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}(x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S_1 \tag{13}$$

Обозначим решение этой задачи для заданной функции g через $w(x, y, z; g)$. С учетом важного результата из работы [3] получим, что

$$A^* g = \frac{\partial w}{\partial n}(x, y, z; g), \quad (x, y, z) \in S_2 \tag{14}$$

Таким образом, операторы A и A^*, входящие в уравнение (10), определяются смешанными задачами (4)-(6) и (11)-(13) соответственно.

Значение параметра регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ может быть найдено из принципа невязки [4]:

$$\|Av_\alpha - U_\delta\|_{L_2(S_1)} = \delta \tag{15}$$

В том случае, когда известна некоторая предварительная информация $\tilde{v}(x, y, z)$ о виде искомого решения, вместо функционала (9) можно ввести функционал

$$M^\alpha[v; \tilde{v}] = \|Av - U_\delta\|^2_{L_2(S_1)} + \alpha\|v - \tilde{v}\|^2_{L_2(S_2)}, \quad \alpha > 0 \tag{16}$$

Необходимое условие минимума, из которого находится приближенное решение, имеет в этом случае вид:

$$\alpha(v - \tilde{v}) + A^* A v = A^* U_\delta \tag{17}$$

Из изложенного выше следует, что задача построения приближенного решения сводится к задаче решения уравнения (10) или уравнения (17).

В работе исследуется алгоритм численного решения уравнений (10) и (17) на основе конечномерной аппроксимации операторов A и A^* в рамках методов граничных и конечных элементов. Представлены результаты численных экспериментов решения обратной задачи электрокардиографии для модельных источников электрического поля сердца. Приводятся результаты верификации численного метода по результатам внутрисердечного электрофизиологического исследования сердца. Обсуждаются перспективы предложенного алгоритма для решения обратной задачи электрокардиографии для модели грудной клетки с учетом различной электропроводности биологических тканей.

Список литературы

[1] Барр Р., Спэк М. Решения обратной задачи, выраженные непосредственно в форме потенциала. – В кн.: Теоретические основы электрокардиологии / Пер. с англ. – М.: Медицина, 1979. – С. 341.

[2] Тихонов А.Н., Арсенин А.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986

[3] Dihn Nho Hao, D Lesnic The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method // IMA Journal of Applied Mathematics (2000) 65, 199-217.

[4] Морозов В.А. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации // ЖВМ и МФ. 1968. Т.8, N 2. С.295-309.