

Математическое моделирование одного класса прямых и обратных задач

М.И. Эпов*, Э.П. Шурина**, К.В. Ковбасов***

* ИНГГ им А.А. Трофимука,
 пр. Ак. Коптюга, 3,
 630090 Новосибирск, Россия

** НГТУ,
 пр. К. Маркса, 20,
 630092 Новосибирск, Россия
 E-mail: shurina@online.sinor.ru

*** НГТУ
 пр. К. Маркса, 20,
 630092 Новосибирск, Россия
 E-mail: kostya_k@ngs.ru

1 Постановка задачи

Одним из методов геофизических исследований является модифицированный метод сопротивлений, основанный на использовании многоэлектродной установки, расположенной на дневной поверхности [1]. В фиксированных точках на поверхности земли расположены пары электродов, к которым подведено постоянное напряжение. По измеряемым значениям электрического поля необходимо определить свойства среды. Исследуются модификации метода Ньютона для задачи минимизации функционала для данного класса обратных задач.

2 Прямое моделирование

Рассмотрим многослойную среду (рис. 1). На границе верхнего слоя расположена пара электро-

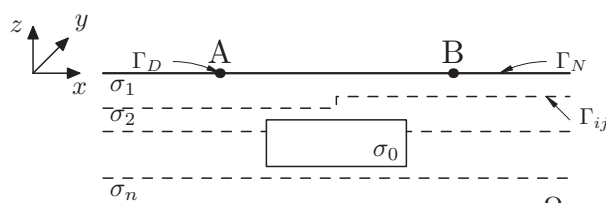


Рис. 1: Объект в многослойной среде

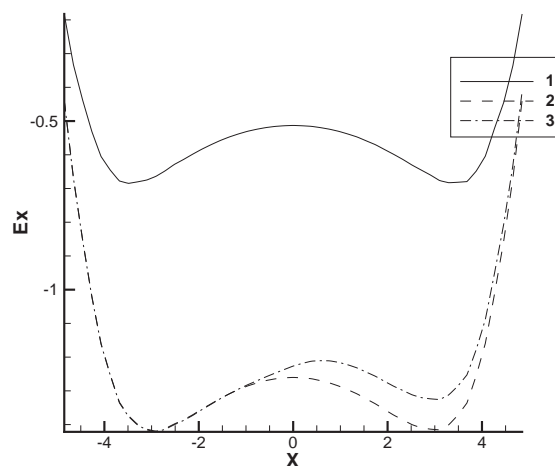


Рис. 2: E_x для рассматриваемых типов референтных сред, вдоль линии параллельной АВ, удаленной на 2м.

дов, к которым подведено постоянное напряжение. Необходимо найти распределение электрического потенциала φ в среде.

2.1 Математическая постановка

Рассматривается стационарный процесс, тогда справедливо представление напряженности электрического поля в виде

$$\vec{E} = -\nabla \varphi.$$

Распределение потенциала φ описывается следующей краевой задачей

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma \nabla \varphi &= 0, \text{ в } \Omega; \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \\ \varphi|_{\Gamma_D} &= \varphi_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_N} = 0, \\ [\varphi]_{\Gamma_{ij}} &= 0, \quad \left[\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\Gamma_{ij}} = 0, \end{aligned}$$

где Γ_{ij} — границы раздела подобластей с различной электропроводностью.

2.2 Типы референтных сред

Во всех рассматриваемых вариантах предполагалось, что объект имеет параллелепипедальную форму, размеры $6\text{ м} \times 4\text{ м} \times 2\text{ м}$ и проводимость $10^{-4} \frac{1}{\text{Ом м}}$, глубина залегания 3 м до центра объекта, расстояние между электродами 10 м , разность потенциалов на электродах 300 В . Проводились измерения компоненты E_x по линии, расположенной на некотором удалении от прямой, соединяющей электроды.

Моделирование в горизонтально-слоистой среде (рис. 2) показало, что по E_x можно сделать выводы о наличии объекта, относительном расположении объекта и электродов, о протяженности объекта в направлении оси x и глубине его залегания.

Если референтная среда представляет из себя слоистую среду с вертикальной ступенькой, то по компоненте напряженности электрического поля E_x идентифицируется объект и ступенька.

3 Обратная задача

Пусть в результате конечно-элементной аппроксимации прямой задачи получено уравнение вида

$$A(m)u = q,$$

где $A(m)$ — конечно-элементная аппроксимация оператора, u — вектор неизвестных, q — вектор правой части, m — некоторая функция проводимости среды, например $m = \ln \sigma$.

Пусть известна близкая по значению к m функция \tilde{m} , соответствующая одной из референтных сред, и известны показания датчиков b . Тогда задачу определения m сформулируем как задачу минимизации функционала [2]

$$\phi(m, u) = \left(\frac{1}{2} \|Qu - b\|^2 + \frac{\beta}{2} \|W(m - \tilde{m})\|^2 \right), \quad (1)$$

при условии

$$A(m)u = q, \quad (2)$$

где Q — оператор, действующий из пространства решений в пространство датчиков, $\beta \geq 0$ — параметр регуляризации, W — регуляризирующий оператор. Введем обозначения

$$\dim(u) = L, \quad \dim(m) = M, \quad \dim(b) = N.$$

Тогда размерности матриц в (1)–(2) будут следующими: $\dim(A) = L \times L$, $\dim Q = N \times L$, $\dim W = M \times M$.

3.1 Метод Ньютона

Для решения задачи условной минимизации (1)–(2) воспользуемся методом множителей Лагранжа. Тогда решение задачи (1)–(2) сведется к минимизации функционала

$$L(u, m, p) = \frac{1}{2} \|Qu - b\|^2 + \frac{\beta}{2} \|W(m - \tilde{m})\|^2 + p^T (Au - q), \quad (3)$$

где p — L -вектор множителей Лагранжа. Для решения задачи (3) необходимо выполнение условий

$$\frac{\partial L}{\partial u} = Q^T (Qu - b) + A^T p = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \beta W^T W(m - \tilde{m}) + G^T p = 0 \quad (4b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = Au - q = 0, \quad (4c)$$

где $G = \frac{\partial Au}{\partial m}$, $\{g\}_{ij} = \sum_{k=1}^L u_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial m_j}$, $\dim G = L \times M$.

Решим нелинейную систему (4) методом Ньютона [3]. Каждая итерация метода для нахождения приращений δu , δm , δp требует решения системы вида

$$\begin{pmatrix} Q^T Q & K & A^T \\ K^T & \beta W^T W + R & G^T \\ A & G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta m \\ \delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Q^T (Qu - b) + A^T p \\ \beta W^T W(m - \tilde{m}) + G^T p \\ Au - q \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $R = \frac{\partial G^T p}{\partial m}$, $\{r\}_{ij} = \sum_{k=1}^L p_k \frac{\partial g_{ik}}{\partial m_j}$, $\dim R = M \times M$, $K = \frac{\partial A^T p}{\partial m}$, $\{k\}_{ij} = \sum_{k=1}^L p_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial m_j}$, $\dim K = L \times M$.

Используем блочную структуру (5) и выразим δu и δp .

$$\delta u = - (u - A^{-1}q + A^{-1}G\delta m) \quad (6)$$

$$\delta p = A^{-1T} Q^T Q (u - A^{-1}q) + A^{-1T} (Q^T Q A^{-1}G - K) \delta m - A^{-1T} Q^T (Qu - b) - p \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \left(\beta W^T W + R - K^T A^{-1}G + G^T A^{-1T} Q^T Q A^{-1}G - G^T A^{-1T} K \right) \delta m = \\ & = -\beta W^T W(m - \tilde{m}) + K^T (u - A^{-1}q) - G^T A^{-1T} Q^T (b - QA^{-1}q) \end{aligned} \quad (8)$$

Алгоритм решения задачи (1)–(2) (задачи (3)) состоит из следующих шагов:

1. Задать начальные значения u_0 , m_0 и p_0 ;
2. Решить уравнения (8), (7), (6) относительно δm_i , δp_i , δu_i ;
3. Вычислить $u_{i+1} = u_i + \delta u_i$, $p_{i+1} = p_i + \delta p_i$, $m_{i+1} = m_i + \delta m_i$;
4. Проверить условие завершения, например $\|\delta m_i\| < \varepsilon_m$:
 - а) Если выполняется то выход;
 - б) Иначе переход на шаг 2.

3.2 Модификации метода

Значение потенциала u и множителей Лагранжа p из (4а) и (4с) могут быть выражены.

$$u = A^{-1}q, \quad (9)$$

$$p = -(A^T)^{-1}Q^T(Qu - b) \quad (10)$$

Соотношения (9) и (10) используются для задания начальных значений u и p , при модификациях метода Ньютона, а именно: непосредственное вычисление u и p на каждой итерации вместо нахождения приращений δu и δp из (6) и (7).

Решение задачи (3) в соответствии с предложенным алгоритмом приводит к медленной сходимости итерационного процесса или его стагнации при неудачном выборе начального приближения \tilde{m} . Процесс может быть ускорен, если пренебречь информацией о вторых производных R и K . Тогда соотношение (8) примет вид

$$(\beta W^T W + G^T (A^{-1})^T Q^T Q A^{-1} G) \delta m = -\beta W^T W (m - \tilde{m}) - G^T (A^{-1})^T Q^T (b - Q A^{-1} q). \quad (11)$$

Таким образом, получено 4 модификации метода Ньютона [3]:

- N1.** На каждом шаге вычисляются δm , δp , δu по формулам (8), (7), (6) и вычисляются m , u и p ;
- N2.** Вычисляются δm и δp по формулам (8), (7), вычисляется m , вычисляется u по формуле (9), затем вычисляется p ;
- N3.** Вычисляется δm по формуле (8), вычисляется m , вычисляется u и p по формулам (9) и (10).
- GN.** Вычисляется δm по формуле (11), вычисляется m , вычисляется u по формуле (9).

Метод **N3** эквивалентен методу Ньютона, а метод **GN** — методу Гаусса-Ньютона [3] для экстремальной задачи вида

$$\arg \min_m \phi(m) = \arg \min_m \left(\frac{1}{2} \|Q A^{-1}(m)q - b\|^2 + \frac{\beta}{2} \|W(m - \tilde{m})\|^2 \right).$$

Вычислительная сложность модификаций **N2**, **N3** и **GN** меньше, чем в алгоритме **N1**. Для вычисления правой части системы (6) требуется две операции умножения матрицы на вектор, для (7) — восемь операций умножения матрицы на вектор и два решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с одной матрицей, но разными правыми частями. В методе **GN** каждая итерация решения системы (11) требует шесть операций умножения матрицы на вектор и решения двух СЛАУ, в то время, как решение (8) требует одиннадцати матрично-векторных умножений и решения трех СЛАУ.

4 Результаты

Проводилось тестирование на трех референтных средах: объект во вмещающей среде с проводимостью $1/100 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$; объект, слой с мощностью 1м, проводимостью $1/100 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$ и вмещающая среда проводимостью $1/600 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$; объект, 2 слоя со ступенчатой границей над объектом, мощностью от 1м до 1.5м и проводимостью $1/100 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$ и $1/300 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$, и вмещающая среда проводимостью $1/600 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$. Датчики расположены на дневной поверхности, погрешность 5%.

Результаты вычислительного эксперимента (таблица 1) позволяют сделать вывод о том, что практически все рассмотренные методы могут быть использованы для решения данного типа обратных задач. Но модификация **GN** характеризуется меньшей сложностью.

№	N1	N2	N3	GN	$\sigma_i, \frac{1}{O_{M \ M}}$
1	4	4	4	10	$\sigma_0 = 9.9 \cdot 10^{-5}, \sigma_1 = 0.01$
2	18	18	18	19	$\sigma_0 = 9.9 \cdot 10^{-5}, \sigma_1 = 9.9 \cdot 10^{-3}, \sigma_2 = 1.6 \cdot 10^{-3}$
3	11	11	11	11	$\sigma_0 = 9.9 \cdot 10^{-5}, \sigma_1 = 0.01, \sigma_2 = 1.6 \cdot 10^{-3}, \sigma_3 = 3.3 \cdot 10^{-3}$

Таблица 1: Количество итераций рассмотренных модификаций для различных типов референтных сред

Список литературы

- [1] Геофизические исследования археологических памятников в северо-западной монголии в 2005 г. / М. Эпов, В. Молодин, А. Манштейн и др. // Проблемы археологии, этнографии, антропологии Сибири и сопредельных территорий (Материалы Годовой сессии Института археологии и этнографии СО РАН 2005 г.). — Новосибирск: Изд-во Ин-та археологии и этнографии СО РАН, 2005. — Т. XI, часть I. — С. 503–508.
- [2] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — 2 изд. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
- [3] *Haber E., Asher U. M., Oldenburg D.* On optimization techniques for solving nonlinear inverse problems // *Inverse Problems*. — 2000. — Vol. 16. — Pp. 1263–1280.