Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”,
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Исследование влияния суточного хода температуры на конвективные процессы в глубоком стратифицированном озере в модельном случае

А.Н. Ермоленко*

* НГУ,
Пирогова, 2,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: ean@ngs.ru

Работа автора была поддержана СО РАН (проект 117)

С целью исследования влияния суточного хода температур на конвективные процессы в глубоком стратифицированном водоеме (озере) рассмотрена модельная задача теории гидродинамической устойчивости.

Интерес к задаче вызвали исследования последних лет на озере Байкал. Результаты наблюдений, полученные с использованием современной аппаратуры, свидетельствуют о наличии в озере механизма глубокого перемешивания, способствующего переносу поверхностных вод Байкала в придонные области [1].

При исследовании процессов, протекающих в глубоководных озерах, привлекает внимание эффект аномального теплового расширения воды. Известно, что в пренебрежении зависимостью плотности от давления, плотность воды является немонотонной функцией температуры. Эта функция достигает максимума при температуре, приближенно равной 4 ^{0}C (при так называемой температуре инверсии теплового расширения). В этом случае уравнение состояния воды можно записать в виде:

$$\rho = \rho_0(1 - \gamma[T - T_0]^2),$$

где ρ_0 - максимальное значение плотности; γ – коэффициент теплового расширения; T_0 – температура инверсии. Немонотонная зависимость плотности от температуры вызывает сложную стратификацию в слое жидкости, температура поверхности которого больше температуры инверсии, а температура нижней границы меньше ее. Выше точки инверсии градиент плотности совпадает с направлением силы тяжести и жидкость гравитационно устойчива. Ниже этой точки плотность уменьшается с ростом глубины и стратификация жидкости оказывается неустойчивой. Конвективные движения, зарождающиеся в нижней, неустойчивой области, распространяются также и в верхнюю, устойчиво стратифицированную зону. Аналогичные явления имеют место и в других ситуациях, когда устойчивые слои жидкости ограничивают неустойчиво стратифицированную область. Такую конвекцию называют проникающей. Однако, следует учитывать, что в области больших глубин будет проявляться эффект сжимаемости воды при высоких давлениях, проявляющийся, например, в понижении температуры инверсии с увеличением глубины погружения частицы жидкости и, следовательно, с ростом давления. Максимальные значения, которые могут принимать плотность и коэффициент теплового расширения, также являются функциями давления. Возникающие перепады давления могут оказывать существенное влияние на распределение плотности, а следовательно, и на протекающие конвективные процессы. Рассматриваемая зависимость плотности от давления и температуры описывает эту аномалию.

Предполагается, что первоначально покоящаяся вязкая теплопроводная жидкость заполняет слой с плоскими границами. Температура нижней границы слоя является постоянной, а на верхней границе периодически изменяется во времени по закону: $T = T_2 + A \sin \Omega t$. Это приводит к неоднородному по глубине и периодическому по времени равновесному градиенту температуры. На нижней границе слоя выполнено условие прилипания, верхняя граница считается свободной. Уравнение состояния жидкости (воды) при этом описывается формулой [2]:

$$\rho(T,p) = \rho_m(p)[1-\gamma(p)(T-T_m(p))^2], \text{ где}$$
$$\rho_m(p) = 999,972 + 4,916\ 021 \cdot 10^{-2}p,$$
$$\gamma(p) = 8,572\ 628 \cdot 10^{-6} - 7,061\ 491 \cdot 10^{-9}p,$$
$$T_m(p) = 3,985\ 694 - 0,020\ 617p$$

(единица измерения давления - бар, температуры - градус Цельсия).

В рамках линейной теории численно исследуется устойчивость состояния механического равновесия рассматриваемого слоя.

При выводе модели конвекции изменения плотности, вызванные изменениями температуры и давления, учитывались, как и в приближении Обербека - Буссинеска [3], только в членах, отвечающих подъемной силе.

Решения возникающей при анализе устойчивости линейной задачи для возмущений ищутся в виде:

$$(\overline{\boldsymbol{V}}, \overline{p}, \overline{T})(x,y,z,t) = (\boldsymbol{V}, p, T)(z,t)\exp(\sigma t + i\alpha_x x + i\alpha_y y),$$

где амплитуды $(\boldsymbol{V}, p, T)(z,t)$ – периодические по времени функции.

В общем случае собственные числа σ соответствующей спектральной задачи являются комплексными. При этом те собственные числа, которые лежат на мнимой оси называются критическими (пороговыми). В пространстве параметров они отделяют область устойчивости от области, отвечаючей неустойчивым состояниям.

Непосредственный численный поиск возмущений для которых $\sigma \neq 0$ не увенчался успехом. Исследовано влияние параметров задачи на критические значения числа Рэлея (они определяются из условия $\sigma = 0$) и волнового числа, а также на критические движения, возникающие в слое при потере устойчивости.

При численном исследовании спектральной задачи использовался метод ортогонализации Годунова - Абрамова [4,5].

1. *Гранин Н.Г., Шимараев М.Н.* К вопросу о стратификации и механизме конвекции в Байкале // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 2. С.381-385.

2. *Бочаров О.Б., Васильев О.Ф., Овчинникова Т.Э.* Приближенное уравнение состояния пресной воды вблизи температуры максимальной плотности// Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35. № 4. С. 556-558.

3. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости/ *Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий.* М.: Наука, 1972.

4. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Успехи мат. наук. 1961. Т. 16., вып.3, № 99. С. 171-174.

5. Термокапиллярная неустойчивость/ *В.К. Андреев, В.Е. Захватаев, Е.А. Рябицкий.* Новосибирск: Наука, 2000.