Международная конференция "Обратные и некорректные задачи математической физики",
посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Численное решение обратных задач для системы нелинейных уравнений параболического типа

В.Е. Распопов*, **Д.В. Панова****

* **ИЕиГН СФУ,**
пр. Свободный, 79,
630041 Красноярск, Россия
E-mail: raspopov_ve@krasu.ru

** **ИЕиГН СФУ,**
пр. Свободный, 79,
630041 Красноярск, Россия
E-mail: visna@inbox.ru

В работе для системы двух уравнений параболического типа

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \mu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{a_1 u_1 u_2}{k + u_2} + f_1(t, x), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \mu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{a_2 u_1 u_2}{k + u_2} + f_2(t, x), \end{aligned} \tag{1}$$

в области $D = \{0 < x < 1, 0 < t < 1\}$ решаются обратные коэффициентные задачи.

Изложим методы решения, когда неизвестен коэффициент k и когда неизвестен какой-либо коэффициент при старшей производной и коэффициент k.

В каждом случае заданы начальные

$$\begin{aligned} u_1(0, x) &= u_{01}(x), \\ u_2(0, x) &= u_{02}(x), \end{aligned} \tag{2}$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} u_1(t, 0) = M_{10}(t), u_1(t, 1) = M_{11}(t), \\ u_2(t, 0) = M_{20}(t), u_2(t, 1) = M_{21}(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Если неизвестен коэффициент k, то в качестве условия переопределения задаем

$$u_1(t, \xi) = H_1(t), \tag{4}$$

или

$$u_2(t, \xi) = H_2(t), \tag{5}$$

где $0 < \xi < 1$, ξ - фиксированная точка.

В случае когда наряду с коэффициентом k неизвестен коэффициент μ_1 или μ_2 дополнительно задаем на одной из границ области интенсивность потока, например,

$$\mu_1(t) \frac{\partial u_1}{\partial x}(t, 0) = \beta(t), \tag{6}$$

В рассмотренных задачах предполагалось, что неизвестные коэффициенты либо функции только независимой переменной t либо константы. Если неизвестен только коэффициент k и он является константой, то условие переопределения задавали также в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(0, \xi) = C. \tag{7}$$

Уравнения (1) представляют собой пространственное обобщение модификации вольтерровской модели хищник-жертва. В частности изучалась математическая модель, в которой $u_1(t,x)$ - это концентрация фитопланктона, а $u_2(t,x)$ - концентрация биогенных элементов.

Отметим, что поставленные задачи являются нелинейными относительно неизвестных функций. Теорем существования и единственности решения для этих обратных задач авторам не известно. Рассмотренные задачи решались численно. Алгоритмы решения следующие.

Используя условия переопределения (4) или (5), обратную задачу сводим к прямой. Прямую задачу решаем с помощью трех разностных аппроксимаций: явной и неявной схем, и схемы расщепления.

Приведем явную разностную схему.

$$
\begin{aligned}
&\frac{{y_1}_j^{n+1}-{y_1}_j^n}{\tau}={\mu_1}_j^n\frac{{y_1}_{j+1}^n-2{y_1}_j^n+{y_1}_{j-1}^n}{h^2}+\frac{a_1^n{y_1}_j^n{y_2}_j^n}{k^n+{y_2}_j^n}+{f_1}_j^n,\\
&\frac{{y_2}_j^{n+1}-{y_2}_j^n}{\tau}={\mu_2}_j^n\frac{{y_2}_{j+1}^n-2{y_2}_j^n+{y_2}_{j-1}^n}{h^2}-\frac{a_2^n{y_1}_j^n{y_2}_j^n}{k^n+{y_2}_j^n}+{f_2}_j^n,\\
&k^n=\frac{a_1^nH_1(t_n){y_2}_{k_1}^n}{H_1'(t_n)-{\mu_1}_{k_1}^n\frac{{y_1}_{k_1+1}^n-2{y_1}_{k_1}^n+{y_1}_{k_1-1}^n}{h^2}-{f_1}_{k_1}^n}-{y_2}_{k_1}^n,\\
&j=\overline{1,M-1},n=\overline{0,N-1}.\\
&{y_1}_j^0=u_{01}(x_j),{y_2}_j^0=u_{02}(x_j),j=\overline{0,M},\\
&{y_1}_0^n=M_{10}(t_n),{y_1}_M^n=M_{11}(t_n),\\
&{y_2}_0^n=M_{20}(t_n),{y_2}_M^n=M_{21}(t_n),n=\overline{0,N}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Не нарушая общности полагаем, что точке ξ соответствует узел с номером k_1. Численное решение находим явно последовательно по слоям по времени.

В неявной схеме вторые производные аппроксимируем на верхнем, а младшие члены уравнения на нижнем временных слоях. Неявная разностная схема на каждом временном слое представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, решение которой находим с помощью метода прогонки.

В схеме расщепления уравнения системы (1) на каждом промежутке по времени расщепляем по физическим процессам. Так для первого уравнения получаем

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=2\mu_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},t_n<t\le t_{n+1/2}. \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{2a_1u_1u_2}{k+u_2}+2f_1,t_{n+1/2}<t\le t_{n+1}. \tag{10}$$

Используя входные данные, на первом полушаге решаем краевую задачу для уравнения (9), на втором полушаге - задачу Коши для уравнения (10). Начально-краевую задачу для уравнения (9) решаем с помощью явной или неявной схем, а задачу Коши для уравнения (10) методом Рунге-Кутта.

Вычислительные эксперименты, проведенные на многочисленных тестах для данных схем показали, что с уменьшением шагов сетки абсолютная и относительная погрешности убывают. Поэтому можно сделать предположение о сходимости численного решения к точному. На всех рассмотренных тестах наилучшие результаты дала явная схема, в частности при шагах $\tau=0.00005$ и $h=0.01$ относительная погрешность не превышала 1%.

В случае когда наряду с коэффициентом k неизвестем, допустим, коэффициент μ_1 задачу (1)-(4),(6) решаем итерационным методом по слоям по времени. В качестве начального приближения для $\mu_1(t_n)$ берем найденное значение на предыдущем слое. На $s+1$-ой итерации находим $k^{s+1}(t_n)$, $u_1^{s+1}(t_n,x)$, $u_2^{s+1}(t_n,x)$ с помощью явной схемы, а затем из условия (6) уточняем $\mu_1^{s+1}(t_n)$:

$$\mu_1^{s+1}(t_n)=\frac{\beta(t_n)}{\frac{-3{y_1}_0^{s+1}+4{y_1}_1^{s+1}-1{y_1}_2^{s+1}}{2h}}. \tag{11}$$

Критерием окончания итерационного процесса служат условия: $||k^{s+1}(t_n) - k^s(t_n)|| \leq \varepsilon$ и $||\mu_1^{s+1}(t_n) - \mu_1^s(t_n)|| \leq \varepsilon$, где ε - заданное значение.

На всех рассмотренных тестах итерационный процесс сошелся за 2-4 итерации. С уменьшением шагов сетки абсолютная и относительная погрешности убывают. Тем самым можно сделать предположение, что численное решение сходится к точному.

Наряду с рассмотренными решены задачи, когда условия переопределения заданы дискретно на некотором конечном множестве точек. В этом случае аппроксимируем функцию, заданную дискретно кубическим сплайном, и находим численное решение аналогично предыдущим задачам.

Тем самым показано, что идентификацию коэффициентов математических моделей экологии можно эффективно осуществлять с помощью решения обратных задач.