Международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия

Устойчивый алгоритм идентификации функции переходной проводимости электрического разряда

Ю. Е. Воскобойников*, В.А. Литасов**

* НГАСУ (Сибстрин),
ул. Ленинградская 113
630008 Новосибирск, Россия
E-mail: voscob@mail.ru

** НГАСУ (Сибстрин),
ул. Ленинградская 113,
630008 Новосибирск, Россия
E-mail: litasov@elektro.ru

Работа была поддержана грантом Министерства науки и образования 2005 года (1.1.05Д)

Введение. При феноменологическом описании разрядов (в частности и барьерного разряда) широко используется их описание как объектов электрической цепи [1]. В основе таких подходов лежит замена электрофизических явлений, происходящих в разряде, явлениями, происходящих в электрической цепи, состоящей из определенных электрических элементов (сопротивления, емкости, индуктивности). Такую электрическую цепь называют схемой замещения электрического разряда.

При исследовании физики электрических разрядов доступными для измерения являются напряжение $U(t)$ и $I(t)$ ток в цепи с разрядным промежутком. Поэтому возникает задача определения параметров схемы замещения по зарегистрированным значениям функций $U(t)$, $I(t)$. Для этого необходимо идентифицировать (оценить) функцию переходной проводимости $g(t)$ данной схемы замещения, а затем по этой функции определить структуру и параметры схемы замещения.

Если действующее в цепи напряжение имеет импульсную форму, то переходный процесс, происходящий в разрядном промежутке в терминах $U(t)$ и $I(t)$ удобно описать с помощью интеграла Дюамеля:

$$I(t) = U(0)g(t) + \int_0^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} g(t-\tau)d\tau \,, \qquad (1)$$

где $g(t)$ - переходная проводимость. Как правило, значение $U(0)=0$ и поэтому приходим к интегральному уравнению Вольтерра I рода с разностным ядром:

$$I(t) = \int_0^t g(t-\tau)\frac{dU(\tau)}{d\tau}d\tau \,. \qquad (2)$$

Таким образом, задача идентификации функцию переходной проводимости $g(t)$ заключается в решении интегрального уравнения (2) относительно функции $g(t)$. Как правило, напряжение $U(t)$ и ток $I(t)$ регистрируются со случайными погрешностями и приходим к задаче деконволюции интегрального уравнения, когда и правая часть $I(t)$ и ядро уравнения $\frac{dU(t)}{dt}$ заданы неточно.

Очевидно, что рассматриваемая задача идентификации функции переходной проводимости включает 2 этапа:

Этап 1. Вычисление производной $\frac{dU(t)}{dt}$ по измеренным (с погрешностями) значениям функции $U(t)$.

Этап 2. Решение интегрального уравнения (2) относительно функции $g(t)$.

Оба эти этапа связаны с решением некорректных задач и поэтому в данной работе предлагается устойчивый алгоритм идентификации, учитывающий специфику этих задач и исходных данных.

Устойчивое вычисление производной. Предполагается, что функция $U(t)$ определена на интервале $(0, T_U]$ и измеряется в моменты $t_j = \Delta \cdot j$, $j = 0,1,\dots,N_U$ -1, где $N_U = ent[T_U/\Delta]+1$, Δ - шаг дискретизации, $ent[z]$ - целая часть вещественного числа z. Измеренные значения $\tilde{U}_j$ допускают представление

$$\tilde{U}_j = U(j\Delta) + \zeta_j \,, \; j = 0,1,\dots,N_U \text{ -1}, \qquad (3)$$

где ζ_j - случайные величины с математическим ожиданием $M(\zeta_j)=0$, дисперсией $D(\zeta_i)=\delta_\zeta^2$ и отображающие погрешности измерения напряжения.

Для устойчивого дифференцирования функции заданной «зашумленными» значениями строился *сглаживающий кубический сплайн* (СКС) $S_\lambda(t)$ с *краевыми условиями* вида [2,3]:

$$S_\lambda{}'(0) = 0;\; S_\lambda{}'(T_U) = 0\,. \tag{4}$$

Эти условия соответствуют типичной форме импульса напряжения $U(t)$. Можно показать, что СКС с условиями (4) доставляет минимум функционалу

$$\int_0^{T_U} (f''(t))^2\,dt + \lambda \cdot \sum_{j=0}^{N_u-1} p_j (f(t_j) - \tilde{U}_j)^2 \tag{5}$$

среди всех функций $f(t)$ с интегрируемым квадратом второй производной и удовлетворяющих условию (4). После построения сплайна (т.е. после вычисления коэффициентов СКС) первая производная сплайна $S_\lambda{}'(t)$ принимается в качестве ядра $\dfrac{dU(\tau)}{d\tau}$ интегрального уравнения (2).

Основной сложностью при построении СКС является выбор параметра сглаживания λ, от величины которого зависит ошибка дифференцирования. В работе предлагается выбирать параметр λ по точностным характеристикам сплайна [4]. Сглаживающий сплайн $S_\lambda(t)$ интерпретируется как выходной сигнал некоторого фильтра (сплайн-фильтра), на вход которого поступает дискретная последовательность, состоящая из измеренных значений $\tilde{U}_j$ функции $U(t)$. При такой трактовке сглаживающие свойства сплайна можно определить через его *аппаратную функцию* $h_\lambda(t)$, которая характеризует систематическую ошибку сглаживания и дифференцирования: чем меньше «ширина» функции $h_\lambda(t)$, тем меньше систематическая ошибка. В качестве числовой характеристики аппаратной функции принимается ее ширина $\Delta_h(\lambda)$:

$$\Delta_h(\lambda) = \frac{\int_0^\infty |h_\lambda(t)|\,dt}{h_\lambda(0)}\,.$$

Физическая трактовка этой характеристики для задачи дифференцирования достаточно проста: в сглаживающем сплайне и его производной сохраняются (с небольшими амплитудными искажениями) составляющие функции $U(t)$ и производной $U'(t)$, если их ширина больше ширины аппаратной функции $\Delta_h(\lambda)$. Задавая «предельный» размер $\Delta_{пр}$ составляющих, которые должны сохраниться в сплайне, значение λ можно определить из решения нелинейного уравнения:

$$\Delta_h(\lambda) = \Delta_{пр}\,. \tag{9}$$

Заметим, что ошибки оценивания производной интерпретируются как погрешности задания ядра интегрального уравнения и будут учтены при построении регуляризированного решения этого интегрального уравнения. Для этого значения производной сплайна $S_\lambda{}'(t)$ в узлах t_j представляются в виде:

$$S_\lambda{}'(t_j) = \frac{d}{dt}U(t)\Big|_{t=t_j} + \xi_j\,,\; j = 0,1,\ldots,N_U - 1. \tag{10}$$

Случайные величины ξ_j отображают ошибки в вычислении производной по сглаживающему сплайну $S_\lambda(t)$. В дальнейшем предполагается, что дисперсии этих ошибок одинаковы, т.е. $D(\xi_j) = \sigma_\xi^2$.

Решение интегрального уравнения. Вернемся к уравнению (2), в котором функцию $\dfrac{dU(\tau)}{d\tau}$ заменим ее оценкой $S_\lambda{}'(t)$ – производной сглаживающего кубического сплайна. Необходимо найти решение этого уравнения – переходную проводимость $g(t)$. Известно, что решение такого уравнения является некорректно поставленной задачей и для вычисления устойчивого решения необходимо использовать специальные методы – методы регуляризации [3,5,6].

В работе [7] предложен регуляризирующий алгоритм идентификации импульсной функции стационарной динамической системы (ядра интегрального уравнения) когда входной и выходной сигналы идентифицируемой системы известны со случайными ошибками. Предлагается алгоритм оценивания оптимального параметра регуляризации. Использование дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) обуславливает высокую вычислительную эффективность, как при построении регуляризированного решения, так и при выборе параметра регуляризации.

В данной работе этот регуляризирующий алгоритм адаптируется к рассматриваемой задаче идентификации функции переходной проводимости. Так как при построении регуляризированного решения и выборе параметра регуляризации требуется задания дисперсий σ_η^2 (погрешностей задания правой части) и σ_ξ^2 (погрешностей задания ядра), которые на практике неизвестны, то в работе предлагаются несмещенные оценки для этих дисперсий, вычисляемые через коэффициенты ДПФ последовательностей $\left\{I(t_j)\right\}, \left\{S'_\lambda(t_j)\right\}$.

Результаты вычислительного эксперимента. Для иллюстрации работоспособности описанного алгоритма идентификации рассмотрим результаты следующего вычислительного эксперимента. Функция проводимости $g(t)$ задавалась выражением $g(t) = 0.71 \cdot e^{-416.666 \cdot t} \cdot \cos(571.304 \cdot t + 1.059)$ или в общем виде: $g(t) = A \cdot e^{\mu \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$. Значения $U(t_j)$ искажались нормально распределенными случайными числами ζ_j с нулевым средним и дисперсией σ_ζ^2, вычисляемой по относительному уровню шума δ_U выражением $\sigma_\zeta^2 = \left(\dfrac{\delta_U \cdot \max\left|U(t_j)\right|}{2} \right)^2$. Аналогично, значения $I(t_j)$ искажались нормально распределенными случайными числами η_j с нулевым средним и дисперсией σ_η^2, определяемой по относительному уровню шума δ_I. По построенному регуляризированному решению $g_\alpha(t_j)$ уравнения (2) вычислялись оценки $\widehat{A}, \widehat{\mu}, \widehat{\omega}, \widehat{\varphi}$. Точность этих оценок определялась вектором относительных ошибок

$$\delta_p = \begin{Vmatrix} \left|\widehat{A} - A\right| / \left|A\right| \\ \left|\widehat{\mu} - \mu\right| / \left|\mu\right| \\ \left|\widehat{\omega} - \omega\right| / \left|\omega\right| \\ \left|\widehat{\varphi} - \varphi\right| / \left|\varphi\right| \end{Vmatrix}.$$

Среднее значение $\overline{\delta_p}$ этого случайного вектора, вычисленное по выборке объемом 30, приведено в таблице для разных относительных уровней $\delta_I = 0.01, 0.10$, $\delta_U = 0.01, 0.10$.

		δ_U	
		0.01	0.10
δ_I	0.01	0.035	0.119
		0.031	0.096
		0.005	0.019
		0.007	0.012
	0.10	0.107	0.136
		0.088	0.112
		0.023	0.045
		0.011	0.023

Сравнивая отдельные проекции векторов $\overline{\delta_p}$, можно отметить, что параметры A, μ оцениваются с немного большими ошибками по сравнению с ω, φ. Это можно объяснить ошибкой регуляризированного решения $g_\alpha(t)$ по амплитуде.

Анализ этой таблицы и результатов других вычислительных экспериментов позволяет сделать вывод: ***предложенный алгоритм идентификации функции переходной проводимости позволяет с приемлемой точностью оценить параметры этой функции***. Алгоритм можно использовать для идентификации более сложных функций переходной проводимости, соответствующих более высокой степени характеристических многочленов схем замещения электрического разряда.

Литература

1. **Самойлович В.И., Гибалов К.В., Козлов В.К.** Физическая химия барьерного разряда.- М.: Издательство МГУ, 1989.-360 с.

2. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 321с.

3. **Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И**. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. – Новосибирск: Наука, 1984.- 238 с.

4. **Воскобойников Ю.Е** Частотный подход к оценке точности сглаживания и дифференцирования экспериментальных данных на основе сглаживающих сплайнов // Автометрия. -1986. - №1. – с.38-43.

5. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1979.- 285 с.

6. **Лаврентьев М. М.** Линейные операторы и некорректные задачи / М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев. – М.: Наука, 1991. – 331 с.

7. **Воскобойников Ю.Е., Литасов В.А.** Регуляризирующий алгоритм непараметрической идентификации при неточных исходных данных // Научный вестник НГТУ. -2005. –№2(20).- С.33-45.