# Структуры биалгебр Мальцева на простой нелиевой алгебре Мальцева.

**М. Е. Гончаров**
*gme@math.nsc.ru*
Институт Математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Биалгебры Ли — это одновременно алгебры Ли и коалгебры Ли, коумножение которых является 1-коциклом. Биалгебры Ли были введены Дринфельдом [1] для изучения решений классического уравнения Янга — Бакстера. В работах [2, 3] дано определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр. В частности, были определены ассоциативные и йордановы Д-биалгебры, а также рассмотрен ассоциативный аналог уравнения Янга — Бакстера и ассоциативные Д-биалгебры, связанные с решениями этого уравнения. Класс йордановых Д-биалгебр, связанный с йордановым аналогом уравнения Янга — Бакстера, был определен в [4], где было доказано, что всякая конечномерная йорданова Д-биалгебра, которая полупроста как алгебра, принадлежит этому классу. В работе [5] изучались альтернативные Д-биалгебры и их связь с альтернативным уравнением Янга-Бакстера. В частности, были описаны все структуры альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли — Диксона.

**Определение.** Пара $(A, \Delta)$, где $A$ — векторное пространство над $F$, а $\Delta : A \mapsto A \otimes A$ — линейное отображение, называется *коалгеброй*. При этом отображение $\Delta$ называется *коумножением*.

Для элемента $a \in A$ будем использовать обозначение $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

На пространстве $A^*$ определим умножение, полагая $\langle fg, a\rangle = \sum\limits_a \langle f, a_{(1)}\rangle\langle g, a_{(2)}\rangle$, где $f, g \in A^*, a \in A$ и $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$. Полученная алгебра называется *дуальной алгеброй* коалгебры $(A, \Delta)$.

Дуальная алгебра $A^*$ коалгебры $(A, \Delta)$ задаёт бимодульное действие на $A$, которое определяется следующим образом $f \rightharpoonup a = \sum a_{(1)}\langle f, a_{(2)}\rangle$ и $a \leftharpoonup f = \sum\langle f, a_{(1)}\rangle a_{(2)}$, где $f \in A^*$ и $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

Пусть теперь $A$ — произвольная алгебра, на которой задано коумножение $\Delta$ и $A^*$ — дуальная алгебра коалгебры $(A, \Delta)$. Алгебра $A$ задаёт бимодульное действие на пространстве $A^*$, определенное формулами

$$\langle f \leftharpoondown a, b\rangle = \langle f, ab\rangle \text{ и } \langle b \rightharpoondown f, a\rangle = \langle f, ab\rangle.$$

Рассмотрим пространство $D(A) = A \oplus A^*$ и зададим на нём умножение, полагая

$$(a + f) * (b + g) = (ab + f \rightharpoonup b + a \leftharpoonup g) + (fg + f \leftharpoondown b + a \rightharpoondown g).$$

Тогда $D(A)$ является обычной алгеброй над полем $F$, а $A$ и $A^*$ — подалгебры в $D(A)$. Алгебру $D(A)$ будем называть дублем Дринфельда.

[0]Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы"(проект 2.1.1.419), гранта РФФИ 09-01-00157-А, Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты НШ-3669.2010.1, МД-2438.2009.1), интеграционного проекта СО РАН №97, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (гос. контракты № 02.740.11.0429, 02.740.11.5191), Лаврентьевского гранта для коллективов молодых учёных СО РАН, постановление Президиума СО РАН №43 от 04.02.2010, а также стипендии Независимого Московского университета.

**Определение.** Пусть $M$ — произвольное многообразие $F$–алгебр и $A$ — алгебра из $M$, на которой дополнительно задано коумножение $\Delta$. Тогда пару $(A, \Delta)$ будем называть *$M$-биалгеброй по Дринфельду*, если алгебра $D(A)$ принадлежит многообразию $M$.

Данная работа посвящена биалгебрам Мальцева.

**Определение.** Антикоммутативная алгебра $M$ называется алгеброй Мальцева, если для любых $x, y, t \in M$ выполняется

$$J(x, y, xt) = J(x, y, t)x,$$

где $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ — якобиан элементов $x, y, z$.

Пусть $M$ — алгебра Мальцева. В работе [6] изучались биалгебры Мальцева. В частности, были найдены необходимые и достаточные условия, при которых пара $(M, \Delta)$ является биалгеброй Мальцева.

Пусть $r = \sum\limits_i a_i \otimes b_i \in M \otimes M$ такой, что $\tau(r) = -r$, где $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ — морфизм перестановки. Определим линейное отображение $\Delta_r(a) = \sum\limits_i a_i a \otimes b_i - a_i \otimes a b_i$. Доказывается следующая

**Теорема 1.** Пара $(M, \Delta_r)$ является биалгеброй Мальцева тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in M$:

$$(C_M(r)(1 \otimes b \otimes 1))(1 \otimes a \otimes 1) - C_M(r)(ab \otimes 1 \otimes 1) - (C_M(r)(1 \otimes 1 \otimes a))(1 \otimes 1 \otimes b) =$$

$$= C_M(r)(b \otimes 1 \otimes a) - C_M(r)(a \otimes b \otimes 1),$$

где

$$C_M(r) = \sum_{ij} a_i a_j \otimes b_i \otimes b_j - a_i \otimes a_j b_i \otimes b_j + a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) является мальцевским аналогом классического уравнения Янга-Бакстера.

В данной работе также описываются структуры биалгебры Мальцева на простой нелиевой алгебре Мальцева $M$(характеристика поля не равна 2,3). В $M$ можно выбрать базис $h, x, x', y, y', z, z'$ с таблицей умножения(выписаны тока ненулевые произведения)

$$[h, x] = 2x, \ [h, y] = 2y, \ [h, z] = 2z,$$

$$[h, x'] = -2x', \ [h, y'] = -2y', \ [h, z'] = -2z',$$

$$[x, x'] = [y, y'] = [z, z'] = h,$$

$$[x, y] = 2z', \ [y, z] = 2x', \ [z, x] = 2y',$$

$$[x', y'] = -2z, \ [y', z'] = -2x, \ [z', x'] = -2y.$$

Для этой цели необходимо рассмотреть два случая - во-первых случай, когда радикал $R$ дубля Дринфельда $D(M)$ отличен от нуля, и во-вторых случай, когда $D(M)$ является полупростой алгеброй.

В первом случае структуры биалгебр Мальцева описываются с помощью следующих утверждений:

**Теорема 2.** Пусть пара $(M, \Delta)$ — биалгебра Мальцева, причем радикал $R$ дубля Дринфельда $D(M)$ отличен от нуля. Тогда существует такой элемент $r$ из $(id - \tau)(M \otimes M)$, что $C_M(r) = 0$ и $\Delta = \Delta_r$. Обратно, любое антисимметричное решение уравнение (1) задает структуру биалгебры Мальцева, причем радикал $R$ дубля Дринфельда $D(M)$ отличен от нуля.

**Предложение 1.** Антисимметричные решения уравнения (1) находятся во взаимно-однозначном соответствии с парой $(B, \omega)$, где $B$ — подалгебра в $M$, а $\omega$ — невырожденная кососимметрическая билинейная форма, удовлетворяющая

$$\omega([x, y], z) + \omega([y, z], x) + \omega([z, x], y) = 0$$

для любых $x, y, z \in B$. В этом случае форму $\omega$ будем называть симплектической, а пару $(B, \omega)$ —- симплектической подалгеброй.

**Теорема 3.** Пусть $(B, \omega)$ — симплектическая подалгебра в $M$. Тогда имеет место один из следующих вариантов:

1. $B$ изоморфна двухмерной абелевой алгебре Ли.

2. $B$ двухмерной неабелевой алгебре Ли.

В этом случае симплектической будет любая невырожденная кососимметрическая билинейная форма.

3. $B$ изоморфна алгебре $M(4)$ — наименьшей нелиевой алгебре Мальцева. В качестве базиса в $M(4)$ можно взять элементы $h, x, y', z$. Симплектической в этом случае будет любая невырожденная кососимметрическая билинейная форма, удовлетворяющая

$$\omega(y', h) = 2\omega(x, z).$$

В случае, кода дубль Дринфельда $D(M)$ является полупростой алгеброй, следующая теорема описывает структуры биалгебры Мальцева на $M$.

**Теорема 2.** Пусть радикал $D(M)$ является полупростой алгеброй. Тогда $D(M) = M_1 \oplus M_2$, где $M_1$ и $M_2$ изоморфны $M$. При этом существует $r \in M \otimes M$ такой, что $\tau(r) \neq -r$, $C_M(r) = 0$ и $\Delta = \Delta_r$.

Обратно, любое решение $r$ уравнения(1), для которого выполнено $\tau(r) \neq -r$, задает структуру биалгебры Мальцева на $M$, причем дубль Дринфельда $D(M)$ в этом случае будет полупростой алгеброй.

При этом, если $r$ — решение уравнения (1), для которого $\tau(r) \neq -r$, то в $M$ можно так выбрать базис $h, x, x', y, y', z, z'$, что

$$r = \frac{1}{4} h \otimes h + \alpha_{12}(h \otimes x - x \otimes h) + \alpha_{15}(h \otimes y' - y' \otimes h) + \alpha_{16}(h \otimes z - z \otimes h) + x \otimes x' + \alpha_{25}(x \otimes y' - y' \otimes x) +$$

$$+ \alpha_{26}(x \otimes z - z \otimes x) + y' \otimes y + \alpha_{56}(y' \otimes z - z \otimes y') + z \otimes z' \qquad (2)$$

и при этом выполняется условие

$$2\alpha_{15} + \alpha_{26} = 0. \qquad (3)$$

Обратно, элемент вида (2), удовлетворяющий условию (3), будет решением уравнения (1).

# ЛИТЕРАТУРА


[1] Дринфельд В. Г. Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга — Бакстера.// ДАН СССР, 268, N 2, 1983, 285–287.

[2] Желябин В. Н. Йордановы биалгебры и их связь с биалгебрами Ли.// Алгебра и логика т.1,36(1997), 3–25.

[3] Желябин В. Н. Йордановы биалгебры симметрических элементов и биалгебры Ли// Сибирский математический журнал, 39, 2(1998), 299–308.

[4] Желябин В.Н. Об одном классе йордановых Д-биалгебр.// Алгебра и анализ т.11(1999), вып. 4, 64–94.

[5] Гончаров М.Е. Классическое уравнение Янга — Бакстера на альтернативных алгебрах. Структура альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли — Диксона.// Сибирский математический журнал 48 5(2007), 1009-1025.

[6] Vershinin V.V. On Poisson-Malcev structures.// Acta Applicandae Mathematicae 75(2003) 281-292.