ДОЛЯ МАТРИЦ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ СПЕКТРОМ В СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЕ

А. С. Кривоногов
Новосибирский государственный университет

Из работы [1] вытекает, что доля матриц с вещественным спектром в алгебре *всех* матриц $M_n(\mathbb{R})$ равна $1/2^{\frac{n(n-1)}{4}}$. В данной работе аналогичная задача решается для симплектической алгебры Ли

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{X \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^\top J + JX = 0\},$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, I — единичная матрица порядка n.

Пусть $\|X\|_2$ — стандартная евклидова 2-норма на $M_{2n}(\mathbb{R})$, $B_{2n}(r) = \{X \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) \mid \|X\|_2 \leqslant r\}$ — евклидов шар радиуса r с центром в нуле в алгебре Ли $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$ и $R_{2n}(r) = \{X \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) \mid Spec(X) \subset \mathbb{R}, \|X\|_2 \leqslant r\}$ — множество матриц с вещественным спектром из шара $B_{2n}(r)$. Число

$$P_{2n} = \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{vol} R_{2n}(r)}{\operatorname{vol} B_{2n}(r)}$$

считаем по определению долей матриц с вещественным спектром в алгебре Ли $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

Теорема.

$$P_{2n} = \frac{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)!}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} k^{n-k}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}} \cdot \mathfrak{I}_n,$$

где

$$\mathfrak{I}_n = \int\limits_{\substack{x_1+\dots+x_n\leqslant 1\\ x_1>\dots>x_n>0}} \!\!\cdots\!\! \int \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i - x_j)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Доказательство теоремы основано на подсчете якобиана параметризации множества $R_{2n}(r)$, связанной с аналогом теоремы Шура для матриц из $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$, а также вычислении объема максимальной компактной подгруппы группы Ли $Sp_{2n}(\mathbb{R})$.

При любом данном n интеграл $\mathfrak{I}_n$ можно вычислить точно. Результаты вычислений позволяют предположить, что $P_{2n} = 1/2^{\frac{n^2-2}{2}}$ при $n \geqslant 2$. Гипотеза проверена при $n \leqslant 7$.

1. *A. Edelman*, The probability that a random real Gaussian matrix has k real eigenvalues, related distributions, and the circular law // J.Multivariate Anal., 1997, vol. 60, p. 203–232

Научный руководитель — к.ф.-м.н., проф. НГУ В.А. Чуркин