О КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ ЛЕВИ

В.В. Лодейщикова

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Барнаул

Для некоторого класса $\mathcal{M}$ групп обозначим через $L(\mathcal{M})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит $\mathcal{M}$. Класс $L(\mathcal{M})$ будем называть *классом Леви, порожденным* $\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{N}_c$ — многообразие нильпотентных групп ступени $\leq c$, $\mathcal{N}_{c,\infty}$ — квазимногообразие нильпотентных групп без кручения ступени $\leq c$, $\mathcal{N}_{c,p}$ — многообразие нильпотентных групп ступени $\leq c$ и экспоненты p, $F_n(\mathcal{M})$ — свободная группа в квазимногообразии $\mathcal{M}$ ранга n, $q\mathcal{K}$ — квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathcal{K}$.

Рассмотрим группы, имеющие следующие представления в $\mathcal{N}_2$: $H_p = \text{гр}(x, y \mid [x, y]^p = 1)$, $H_{p^s} = \text{гр}(x, y \mid [x, y]^p = x^{p^s} = y^{p^s} = 1)$, $s \in \mathbb{N}$, p — простое число. Набор qH_{p^s}, qH_p, $qF_2(\mathcal{N}_2)$, qH_{2^2} $p \neq 2$, p — простое число, представляет собой полный список квазимногообразий нильпотентных групп, все собственные подквазимногообразия которых содержат лишь абелевы группы. Целью работы является описание классов Леви, порожденных этими квазимногообразиями.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Описание класса $L(qF_2(\mathcal{N}_2))$

Теорема 1. [1] *Пусть $\mathcal{N}$ — одно из следующих квазимногообразий: $\mathcal{N}_{2,\infty}$, $\mathcal{N}_{2,p}$ (p — простое, $p \neq 2$) и пусть $\mathcal{K}$ — произвольный класс групп из $\mathcal{N}$, содержащий неабелеву группу. Предположим, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой. Тогда*

1) *если $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{2,\infty}$, то $L(q\mathcal{K}) = \mathcal{N}_{3,\infty}$ и*

2) *если $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{2,p}$ (p — простое число, $p \neq 2$), то $L(q\mathcal{K}) = \mathcal{N}_{3,p}$.*

Описание класса $L(qH_p)$

Зафиксируем простое число p, $p \neq 2$. Обозначим через $\mathcal{N}^p$ квазимногообразие, заданное в $\mathcal{N}_2$ следующим бесконечным множеством формул:

$$(\forall x)(\forall y)([x, y]^p = 1), \quad (1) \qquad (\forall x)(x^q = 1 \to x = 1), \quad (3)$$

$$(\forall x)(\forall y)(x^p = 1 \to [x, y] = 1), \quad (2) \qquad (\forall x)(x^{p^2} = 1 \to x^p = 1), \quad (4)$$

где q пробегает множество простых чисел, отличных от p.

Пусть $\mathcal{M}^p$ — квазимногообразие, задаваемое в $\mathcal{N}_3$ тождествами (3), (4) и следующими формулами:

$$(\forall x)(\forall y)([x, y, x]^p = 1), \quad (5) \qquad (\forall x)(\forall y)(x^p = 1 \to [x, y, x] = 1), \quad (6)$$

$$(\forall x)(\forall x_1)...(\forall x_n)(x^{p\delta} = \prod_{i=1}^{n}[x, x_i]^{p\varepsilon_i} \to \prod_{i=1}^{n}[x, x_i, x]^{\varepsilon_i} = 1), \quad (7)$$

где q пробегает множество простых чисел, отличных от p, $\varepsilon_i \in \{-1; 1\}$, $i = 1, ..., n$, δ и n пробегают множество натуральных чисел.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный класс групп из $\mathcal{N}^p$, содержащий неабелеву группу. Предположим, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой. Тогда $L(q\mathcal{K}) = \mathcal{M}^p$.*

Описание класса $L(qH_{p^s})$

Зафиксируем простое число p, $p \neq 2$, и натуральное число s, $s \geq 2$. Обозначим через $\mathcal{N}^{p^s}$ квазимногообразие, заданное в $\mathcal{N}_2$ следующим бесконечным множеством формул:

$$(\forall x)(\forall y)([x,y]^p=1), \quad (8) \qquad (\forall x)(x^{p^s}=1), \quad (9)$$

$$(\forall x)(\forall y_1)\dots(\forall y_n)(\forall z_1)\dots(\forall z_n)(\forall u)(x^{p^m}=\prod_{i=1}^{n}[y_i,z_i]\to [x,u]=1), \tag{10}$$

$$(\forall x)(\forall y_1)\dots(\forall y_n)(\forall z_1)\dots(\forall z_n)(x^{p^m}=\prod_{i=1}^{n}[y_i,z_i]\to x^{p^m}=1), \tag{11}$$

где n — натуральное число, $m=1,\dots,s-1$.

Пусть $\mathcal{M}^{p^s}$ — квазимногообразие, задаваемое в $\mathcal{N}_3$ тождеством (9) и формулами:

$$(\forall x)(\forall y)([x,y,x]^p=1), \tag{12}$$

$$(\forall x)(\forall y_1)\dots(\forall y_n)(\forall u)(x^{p^m}=\prod_{i=1}^{n}[x,y_i,x]\to [x,u,x]=1), \tag{13}$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_n)((x^{p\delta}\prod_{i=1}^{n}[x,x_i]^{\varepsilon_i})^{p^m}=\prod_{i=1}^{n}[x,y_i,x]\to \prod_{i=1}^{n}[x,x_i,x]^{\varepsilon_i}=1), \tag{14}$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_n)((x^{p\delta}\prod_{i=1}^{n}[x,x_i]^{\varepsilon_i})^{p^m}=\prod_{i=1}^{n}[x,y_i,x]\to \prod_{i=1}^{n}[x,y_i,x]=1), \tag{15}$$

где ε_i $(i=1,\dots,n)$, δ и n пробегают множество натуральных чисел, $m=1,\dots,s-1$.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный класс групп из $\mathcal{N}^{p^s}$, содержащий неабелеву группу. Предположим, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой. Тогда $L(q\mathcal{K})=\mathcal{M}^{p^s}$.*

Квазимногообразия Леви экспоненты 2^n

Зафиксируем натуральное число n, $n\geq 2$. Пусть $\mathcal{R}_{2^n}$ — многообразие групп, заданное в $\mathcal{N}_2$ формулами

$$(\forall x)(\forall y)([x,y]^2=1), \quad (16) \qquad (\forall x)(x^{2^n}=1). \quad (17)$$

Обозначим через $\mathcal{R}$ квазимногообразие групп, заданное в $\mathcal{R}_{2^n}$ квазитождеством

$$(\forall x)(\forall y)(x^{2^{n-1}}=1\to [x,y]=1). \tag{18}$$

Теорема 4. *Класс $L(\mathcal{R})$ совпадает с многообразием $\mathcal{R}_{2^n}$.*

Следствие. *Множество квазимногообразий $\mathcal{K}$ из $\mathcal{R}_4$ таких, что $L(\mathcal{K})=\mathcal{R}_4$, континуально.*

Теорема 5. *Существует класс $\mathcal{K}$ из $\mathcal{R}_8$ такой, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы,– абелева подгруппа, но класс $L(q\mathcal{K})$ не является нильпотентным ступени ≤ 2.*

Пусть $\mathcal{M}$ — многообразие групп, заданное в $\mathcal{N}_2$ тождеством $(\forall x)(x^8=1)$.

Теорема 6. *Существует класс $\mathcal{K}$ из $\mathcal{M}$ такой, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, — абелева подгруппа, но класс $L(q\mathcal{K})$ содержит нильпотентную группу ступени 4.*

Библиографический список

1. *Лодейщикова В.В.* О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Известия АлтГУ. 2009. №1. С. 26–29.