

О ПОДГРУППАХ ПРОСТЫХ D_π -ГРУПП

Манзаева Н. Ч.

Научные руководители Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин
НГУ

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначим множество всех простых чисел, не лежащих в π . Для конечной группы G через $\pi(G)$ обозначим множество простых делителей $|G|$.

Определение 1. *Группа G , для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется π -группой.*

Определение 2. *π -подгруппа H группы G называется π -холловой подгруппой, если $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$.*

Определение 3. *Будем говорить, что группа G обладает свойством E_π (или, короче, $G \in E_\pi$), если в G имеется π -холлова подгруппа. Если при этом любые две π -холловые подгруппы сопряжены, то будем говорить, что группа G обладает свойством C_π ($G \in C_\pi$). Если, к тому же, любая π -подгруппа группы G содержится в некоторой π -холловой подгруппе, то будем говорить, что G обладает свойством D_π ($G \in D_\pi$). Группу со свойством E_π (C_π , D_π) будем называть также E_π - (соответственно, C_π -, D_π -) группой.*

Рассматриваются следующие гипотезы:

Гипотеза 1. *Если $G \in D_\pi$ и H — π -холлова подгруппа группы G , то любая подгруппа M группы G , содержащая H , обладает свойством D_π .*

Гипотеза 2. *Если $G \in D_\pi$, то любая E_π -подгруппа M группы G обладает свойством D_π .*

Заметим, что гипотеза 1 является частным случаем гипотезы 2. Можно сформулировать ещё более общую гипотезу:

Гипотеза 3. *Если $G \in D_\pi$, то любая подгруппа M группы G обладает свойством D_π .*

Однако, существует пример, показывающий, что гипотеза 3 неверна. Действительно, рассмотрим группу $GL_4(16)$, которая обладает свойством $D_{\{3,5\}}$ и содержит подгруппу M , изоморфную S_5 . С другой стороны, известно, что S_5 не является $E_{\{3,5\}}$ -группой, и, следовательно, $M \simeq S_5$ не обладает свойством $D_{\{3,5\}}$.

Основными результатами являются следующие теоремы:

Теорема 1. (mod CFSG) *Если G — контрпример наименьшего порядка к любой из гипотез 1, 2, то G — простая конечная группа.*

Теорема 2. *Пусть G — либо знакопеременная группа A_n , $n \geq 5$, либо одна из спорадических простых групп, обладающая свойством D_π . Тогда любая подгруппа M группы G является D_π -группой.*

Таким образом, контрпример минимального порядка к гипотезам 1, 2, должен быть группой лиева типа.