Программная реализация классификации максимальных под групп нечетного индекса в конечных простых классических группах.*

Н. В. Маслова

butterson@mail.ru

В 1980 году была завершена классификация конечных простых групп. После этого одной из наиболее важных задач теории конечных групп стало изучение подгрупповой структуры простых групп, в частности, изучение их максимальных подгрупп. На основе упомянутой классификации М. Ашбахер в [1] описал семейство естественных геометрически определенных подгрупп конечных простых классических групп, которое было разбито им на восемь классов C_i $(1 \leq i \leq 8)$, называемых теперь классами Ашбахера. Позже М. Либеком и Я. Саксолом [2] и независимо В. Кантором [3] был получен один из самых сильных результатов последних лет в теории конечных групп подстановок, а именно, дана классификация конечных примитивных групп подстановок нечетной степени. В частности, в обеих указанных работах были представлены списки подгрупп конечных простых классических групп, которые могут являться максимальными подгруппами нечетного индекса.

Однако в работах [2, 3] не определено, какие из указанных подгрупп в точности являются подгруппами нечетного индекса, так что задача классификации максимальных подгрупп нечетного индекса конечных простых классических групп оставалась незавершенной. Эта задача была решена автором в [6].

Пусть q — натуральная степень простого нечетного числа и G — одна из конечных простых классических групп следующих типов: $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $PSp_n(q)$ для четного n, $P\Omega_n(q)$ для нечетного n и $P\Omega_n^\varepsilon(q)$ для четного n, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Будем обозначать через V естественное векторное пространство размерности n над полем F с определенной на нем соответствующей билинейной или квадратичной формой, ассоциированное с группой G, где $F = F_q$ для линейных, симплектических и ортогональных групп и $F = F_{q^2}$ для унитарных групп. В случае группы $P\Omega_n^\varepsilon(q)$ для четного n параметр ε называется знаком этой группы и соответствующего ей векторного пространства V и обозначается через sign(V).

Целью данной работы является компьютерная реализация классификации [6]. Автором написана программа на языке Delphy, которая для заданной конечной простой классической группы G выдает список ее максимальных подгрупп нечетного индекса. Вводными данными для программы являются:

1) тип группы — натуральное число (для $PSL_n(q)$ — 1, для $PSU_n(q)$ — 2, для

*Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00324 и грантом УрО РАН для молодых ученых № 80 за 2010 год.

$PSp_n(q)$ — 3, для $P\Omega_n(q)$ — 4, для $P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$ — 5);

2) степень n — натуральное число из отрезка $[2, 32767]$;

3) характеристика p поля F — простое нечетное число, не превосходящее 32767 (это число при вводе проверяется на простоту, и если оно оказывается непростым, программа сообщает об этом);

4) степень расширения поля F над своим простым подполем — натуральное число, не превосходящее 32767;

5) знак группы и соответствующего пространства V (в случае ортогональной группы четной степени) — число 1 или -1.

Результатом работы программы является текстовый файл, пригодный для трансляции в LaTex и содержащий список максимальных подгрупп нечетного индекса заданной конечной простой классической группы. Таким образом, список максимальных подгрупп нечетного индекса конечной простой классичекой группы можно получить, оперируя с пятью ее арифметическими характеристиками.

Хорошо известны следующие изоморфизмы конечных простых классических групп малых степеней: $PSL_2(q) \cong PSU_2(q) \cong PSp_2(q) \cong \Omega_3(q)$, $PSL_4(q) \cong P\Omega_6^+(q)$, $PSU_4(q) \cong P\Omega_6^-(q)$, $PSp_4(q) \cong P\Omega_5(q)$. Классификация [6] получена для групп $PSL_2(q)$, $PSL_4(q)$, $PSU_4(q)$, $PSp_4(q)$. Соответственно именно эти группы заложены в программу.

В рамках данной программы на вводные данные накладываются ограничения, что связано с ограничениями на значения целых чисел типа Integer. Используя возможности новых языков программирования, этих ограничений легко избежать.

Список литературы

[1] *Aschbacher M.* On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. V. 76 P. 469–514.

[2] *Liebeck M.W., Saxl J.* The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc (2). 1985. V. 31, № 2. P. 250–264.

[3] *Kantor W.M.* Primitive permutation groups of odd degree, and an application to the finite projective planes // J. Algebra. 1987. V. 106, № 1. P. 15–45.

[4] *Kleidman P.,Liebeck M.,* The subgroup structure of the finite classical groups – Cambridge.: Cambridge University Press, 1990.

[5] *Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.* Atlas of finite groups – Oxford.: Clarendon Press, 1985.

[6] *Маслова Н.В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2008. Т. 14, №4. С. 100–118