О статусе знакопеременной группы

Н. В. Маслова, Н. Ю. Одинцова

butterson@mail.ru, odincova_natalya@mail.ru

Полугруппу удобно задавать ее порождающим множеством. Кроме мощности порождающего множества важной его оценкой является диаметр. Для произвольного множества X полугруппы W через $\langle X \rangle$ будем обозначать подполугруппу, порожденную X. Если $\langle X \rangle = W$, то наименьшее натуральное число k такое, что любой элемент W представим в виде произведения не более, чем k элементов множества X, называется диаметром $\Delta(X)$ порождающего множества X. Диаметр позволяет оценить, насколько сложно выразить элементы полугруппы через данное порождающее множество.

Следуя [1], статусом $Stat(W)$ полугруппы W назовем величину

$$Stat(W) = \min_{W=\langle X \rangle} |X| \cdot \Delta(X).$$

Статус полугруппы позволяет оценить, насколько "хорошее" порождающее множество может быть выбрано для нее.

Изучение диаметра и статуса алгебраических систем имеет глубокие чисто алгебраические корни (см. [2] — [5]). С другой стороны, интерес к этим числовым характеристикам обусловлен некоторыми принципиально важными проблемами биоинформатики (см., например [6, 7]) и проектирования архитектуры многопроцессорных систем (см., например, [8]).

В частности, существенное значение имеют верхние оценки диаметров и статусов конечных симметрических полугрупп, конечных симметрических и знакопеременных групп.

В ряде работ была получена квадратичная верхняя оценка для статуса симметрической группы S_n (см., например [1, 8]). Затем в [9] эта оценка улучшена до

$$Stat(S_n) \leq O(n \cdot log_2 n).$$

В [10] указана верхняя оценка статуса симметрической полугруппы P_n:

$$Stat(P_n) \leq O(n \cdot log_2 n).$$

Цель данной работы — доказать, что порядки верхних оценок статусов симметрической полугруппы, симметрической и знакопеременной групп совпадают.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. Для знакопеременной группы A_n над n-элементным множеством существует конечное порождающее множество X такое, что $|X| \leq A_8^2$ и $\Delta(X) \leq O(n \cdot log_2 n)$.

Следствие. $Stat(A_n) \leq O(n \cdot log_2 n)$.

Список литературы

[1] *Cherubini A., Howie J., Piochi B.,* Rank and status in semigroup theory

[2] *Cherley J.,* On complementary sets of group elements // Arch.Math.35, 1980. P.313-318.

[3] *Nathanson M.B.,* On a problem of Rohbach for finite groups // J.Number Theory.no. 41, 1992. P.69-76.

[4] *Jia X.-D.,* Thin bases for finite abelian groups // J.Number Theory. no. 36, 1990. P.254-256.

[5] *Jia X.-D .,* Thin bases for finite nilpotent groups // J.Number Theory. no. 41, 1992. P.303-313.

[6] *Shamir R.,* Algorithms in molecular biology: Lecture notes, 2001. http://www.math.tau.ac.il/rshamir/algmb

[7] *Meidanis J., Walter M.E.M.T., Dias Z.,* A lower bound on the reversal and transposition diameter // Relatorio Tecnico IC-00-16. 2000

[8] *Latifi S., Srimani P.K ,* A new fixed degree regular network for parallel processing // Proceeding of the Eighth IEEE Symposium on Parallel and Distributed Proceeding. Los Alamitos, California, 1996. P.152-159.

[9] *Popov V.Yu.,* Status of the symmetric group // International algebraic conference. Ekaterinburg, Ural, August 29 - September 3, 2005. University Publisher, 2005. P.91-92.

[10] *Одинцова Н.Ю., Попов В.Ю.,* О диаметре симметрической группы // Тез. третьей межд. конф. "Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании"