О тензорных произведениях неприводимых представлений конечных почти простых групп

Поляков С.В. Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова.

Лауреат Нобелевской премии по физике Ю. Вигнер ввел важный класс групп. Группа G называется просто приводимой (SR группой), если тензорное произведение любых двух ее неприводимых представлений разлагается в сумму неприводимых представлений группы с кратностями, не превосходящими единицы, а любой элемент группы сопряжен со своим обратным.

Некоторое время было мало что известно о строении SR-групп. Соответствующий вопрос поставлен в [4, стр. 250-251]. С.П. Струнковым была сформулирована гипотеза о том, что SR-группы разрешимы (задача 11.94 из Коуровской тетради). Эта задача была решена Л.С. Казариным, В.В. Янишевским и Е.И. Чанковым [5],[6]. Ими было также доказано, что для разрешимости группы G достаточно и условия, что тензорные квадраты представлений имеют в своем разложении по неприводимым представлениям кратности, не превосходящие единицы (ASR-группы).

Возникает вопрос, как устроены конечные группы, у которых тензорные квадраты неприводимых представлений имеют небольшие кратности.

Определение 1. *Конечная группа G называется SM_m-группой*[1]*, если тензорный квадрат любого неприводимого представления разлагается в сумму неприводимых представлений группы G с кратностями, не превосходящими m.*

В работе полностью классифицированы все конечные простые SM_2-группы. Оказалось, что все они содержатся среди групп $L_2(q)$ и их групп автоморфизмов. Более точно, доказаны теоремы:

Теорема 1. *Среди конечных простых неабелевых групп к SM_2-группам относятся только группы $L_2(q)$, $q = 2^t, t > 2$.*

Теорема 2. *Если G — конечная почти простая группа, принадлежащая классу SM_2-групп, то $L_2(q) \leqslant G \leqslant P\Gamma L_2(q)$, для подходящих q. $PGL_2(q)$ — SM_2-группа.*

Доказательство теоремы 1 опирается на несколько лемм, в которых получены неравенства, связывающие порядок SM_m-группы, ее классовое число и степени неприводимых характеров. Если G — конечная SM_m-группа, $k(G)$ — ее классовое число, а $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, то:
1) $\chi(1) \leqslant mk(G)$ 2) $|G| \leqslant m^2k(G)^3$ 3) $\chi(1) \leqslant mk(G) - m$, если G — неразрешима.

С их помощью удалось оценить число $m(G)$ показывающее, для каких $r \leqslant m$, G не является SM_r-группой. Для некоторых почти простых групп были получены точные значения числа m в системе компьютерной алгебры GAP . Ниже приведены эти результаты.

Классические простые группы лиева типа

$m(L_n(q)) = m(U_n(q)) = q^{(n-1)(n-2)/2}/2 > 2$, для $2 < n \leqslant 6$.
$m(L_n(q)) = m(U_n(q)) = (q^{n/2-1}/6)^{n-1} > 307$, если $n > 6$.
При $n > 2$ ни одна из почти простых групп для $L_n(q)$ и $U_n(q)$ не является SM_2-группой.
$m(B_n(q)) = m(C_n(q)) > 2$, $m(\mathrm{Aut}(B_n(q))) = m(\mathrm{Aut}(C_n(q))) > 2$.
$m(D_n(q)) = m(^2D_n(q)) = (q^{n-1}/6)^{n-1} > 2$, $m(\mathrm{Aut}(D_n(q))) = m(\mathrm{Aut}(^2D_n(q))) = \frac{p^{9t}}{24t\cdot 6^3} > 3$.

Исключительные простые группы лиева типа

$m(E_6(q)) = q^{30}/6^6 > 23014$, $m(\mathrm{Aut}(E_6(p^t)) \geqslant p^{30t}/6^7t > 3835$,

[1] от Square multiplicity

$m({}^2E_6(q)) = q^{30}/6^6 > 23014$, $m(\mathrm{Aut}({}^2E_6(p^t)) \geqslant p^{30t}/6^7t > 3835$,
$m(E_7(q)) = q^{56}/6^7 > 2,57 \cdot 10^{11}$, $m(\mathrm{Aut}(E_7(p^t))) \geqslant p^{56t-8}/3^7t > 1,28 \cdot 10^{11}$,
$m(E_8(q)) = q^{112}/6^8 > 3,09 \cdot 10^{27}$, $m(\mathrm{Aut}(E_8(p^t))) \geqslant p^{112t}/6^8t > 3,09 \cdot 10^{27}$,
$m(G_2(q)) = q^4/36 > 2$, $m(\mathrm{Aut}(G_2(p^t))) \geqslant p^{4t}/36t > 3$,
$m({}^2B_2(2^{2n+1})) > 2^{2n+4}/9 > 113$, $m(\mathrm{Aut}({}^2B_2(2^{2n+1}))) \geqslant 2^{2n+4}/9(2n+1) > 5$,
$m(F_4(q)) = q^{20}/6^4 > 809$, $m(\mathrm{Aut}(F_4(p^t))) \geqslant p^{20t}/6^4t > 809$,
$m({}^3D_4(q)) > q^8/3 > 117$, $m(\mathrm{Aut}({}^3D_4(p^t))) \geqslant p^{8t}/9t > 28$,
$m({}^2G_2(3^{2n+1})) \geqslant 3^{4n+3}/4 > 546$, $m(\mathrm{Aut}({}^2G_2(3^{2n+1}))) \geqslant 3^{4n+3}/4(2n+1) > 20$,
$m({}^2F_4(2^{2n+1})) > 2^{20n+12}/7 > 6 \cdot 10^8$, $m(\mathrm{Aut}({}^2F_4(2^{2n+1}))) \geqslant 2^{20n+12}/7(2n+1) > 2 \cdot 10^8$.

Спорадические группы

$M_{11} \cong \mathrm{Aut}(M_{11})$ — SM_{21}, M_{12} — SM_{56}, $\mathrm{Aut}(M_{12})$ — SM_{28}, M_{22} — SM_{128}, $\mathrm{Aut}(M_{22})$ — SM_{193}, $M_{23} \cong \mathrm{Aut}(M_{23})$ — SM_{813}, $M_{24} \cong \mathrm{Aut}(M_{24})$ — SM_{4576}, $J_1 \cong \mathrm{Aut}(J_1)$ — SM_{52}, J_2 — SM_{64}, $\mathrm{Aut}(J_2)$ — SM_{75}, J_3 — SM_{579}, $\mathrm{Aut}(J_3)$ — SM_{576}, $J_4 \cong \mathrm{Aut}(J_4)$ — $\mathrm{SM}_{328524821}$,
$Co_1 \cong \mathrm{Aut}(Co_1)$ — $\mathrm{SM}_{40380308}$, $Co_2 \cong \mathrm{Aut}(Co_2)$ — SM_{217302}, $Co_3 \cong \mathrm{Aut}(Co_3)$ — SM_{33436}, Fi_{22} — SM_{314914}, $\mathrm{Aut}(Fi_{22})$ — SM_{157588}, $Fi_{23} \cong \mathrm{Aut}(Fi_{23})$ — $\mathrm{SM}_{42665245}$, Fi'_{24} — $\mathrm{SM}_{30229634167}$, $\mathrm{Aut}(Fi'_{24})$ — $\mathrm{SM}_{27596421160}$, Suz — SM_{34364}, $\mathrm{Aut}(Suz)$ — SM_{17199}, He — SM_{3102},
$\mathrm{Aut}(He)$ — SM_{1551}, HS — SM_{737}, $\mathrm{Aut}(HS)$ — SM_{371}, McL — SM_{1251}, $\mathrm{Aut}(McL)$ — SM_{5004}, HN — SM_{743301}, $\mathrm{Aut}(HN)$ — SM_{371658}, $Th \cong \mathrm{Aut}(Th)$ — $\mathrm{SM}_{76031447}$,
$B \cong \mathrm{Aut}(B)$ — $\mathrm{SM}_{1090623755084670}$, $M \cong \mathrm{Aut}(M)$ — $\mathrm{SM}_{214580512284775131795138566}$, $O'N$ — SM_{27808}, $\mathrm{Aut}(O'N)$ — SM_{13904}, $Ru \cong \mathrm{Aut}(Ru)$ — SM_{11482}, $Ly \cong \mathrm{Aut}(Ly)$ — $\mathrm{SM}_{6916215}$.

Знакопеременные группы

$A_5 \cong L_2(4)$ — SM_2, A_6 — SM_3, A_7 — SM_{17}, A_8 — SM_{16}, A_9 — SM_{55}, A_9 — SM_{99}-группа.

Для $10 < n < 30$ можно использовать оценку: $m(A_n) = \chi_0(1)/(k(A_n) - 1) > 77$, где χ_0— характер максимальной степени группы A_n. Выпишем эту оценку в виде неравенства: $m(A_n) > 2^{(5\log_2 n - 24)/30 + 7/15}$. Как несложно вычислить, $m(A_n) > 2$ при $n > 29$.
Единственной почти простой группой для A_n будет группа S_n, за исключением случая $n = 6$, поэтому можно использовать оценку: $m(S_n) \geqslant m(A_n)/2 > 2^{n(5\log_2 n - 24)/30 - 8/15}$. Как несложно увидеть $m(S_n) > 2$ при $n > 33$. Для $10 < n \leqslant 33$ оценим число $m(S_n)$: $m(S_n) \geqslant \chi_0(1)/k(S_n) = \chi_0(1)/p(n) > 41$, где $\chi_0 \in \mathrm{Irr}(A_n)$ — характер максимальной степени, а $p(n) = k(S_n)$ — количество разбиений числа n.

Пусть $4 < n \leqslant 10$. $\mathrm{Aut}(A_5) \cong S_5 \cong PGL_2(5)$ — SM_2, S_7 — SM_7, S_8 — SM_{17}, S_9 — SM_{28}, S_{10} — SM_{117}-группа. $\mathrm{Aut}(A_6) \cong P\Gamma L_2(9)$ — SM_4. Остальными почти простыми группами для A_6 будут группы: M_{10} — SM_5, S_6 — SM_5, $PGL_2(9)$ — SM_4-группа.

Список литературы

1. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. — N.Y.: Harper and Row, 1968.
2. Conway, J.H. Curtis, R.T. Norton, S.P. Parker, R.A. Wilson, R.A. Atlas of Finite Groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. `http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/`
3. Macdonald, I.G. Numbers of conjugacy classes in some finite classical groups / I.G. Macdonald. // Bull. Austral. Math. Soc., 1981. Vol. 23, №1. p. 23-48.
4. Кострикин, А.И. Введение в алгебру, часть 3. Основные структуры алгебры / А.И. Кострикин. — М.: Физ.-мат. лит., 2000.
5. Казарин, Л.С. Янишевский, В.В. О конечных просто приводимых группах / Л.С. Казарин. Янишевский В.В. // Алгебра и анализ. 2007. т. 19, № 6. С. 86-116.
6. Казарин, Л.С. Чанков, Е.И. Конечные просто приводимые группы разрешимы / Л.С. Казарин. Чанков, Е.И. // Математический сборник. 2010. т. 201, № 5. С. 27-40.