НОВЫЕ ПРИМЕРЫ НЕТРИВИАЛЬНЫХ $\delta-$СУПЕРДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ [1]

И. Б. Кайгородов
Новосибирский государственный университет

В работах В. Т. Филиппова было введено понятие δ-дифференцирования, то есть такого линейного отображения ϕ алгебры A, что для фиксированного элемента δ из основного поля верно

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)).$$

Он рассматривал δ-дифференцирования первичных лиевых, альтернативных и мальцевских нелиевых алгебр. В дальнейшем, изучением δ-дифференцирований занимались И. Б. Кайгородов и П. Зусманович. Также в их работах было введено понятие δ-супердифференцирования супералгебры. Под δ-супердифференцированием ϕ супералгебры A авторы понимают однородный элемент Z_2-градуированного пространства эндоморфизмов супералгебры A с условием

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + (-1)^{p(\phi)p(x)}x\phi(y)).$$

И. Б. Кайгородов описал δ-(супер)дифференцирования простых конечномерных супералгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Эти результаты получили частичное обобщение в работе П. Зусмановича, где он рассматривал δ-(супер)дифференцирования первичных супералгебр Ли.

В данной работе дается описание δ-(супер)дифференцирований полупростых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2. Результатом работы является следующая

[1]Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы"(проект 2.1.1.419), гранта РФФИ 09-01-00157-А, Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты НШ-3669.2010.1, МД-2438.2009.1), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракты №02.740.11.0429, №02.740.11.5191), интеграционного проекта СО РАН №97, Лаврентьевского гранта для коллективов молодых учёных СО РАН, постановление Президиума СО РАН №43 от 04.02.2010.

Теорема. *Пусть полупростая конечномерная йорданова супералгебра J над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2$ имеет нетривиальное δ-дифференцирование или δ-супердифференцирование. Тогда $p > 2, \delta = \frac{1}{2}$, и супералгебра J представима в виде $J = \bigoplus_{i=1}^{s}(J_{i1} \oplus \cdots \oplus J_{ir_i} + K_i \cdot 1) \oplus J_1 \oplus \cdots \oplus J_t$, где для некоторого i верно, что J_i является либо супералгеброй векторного типа $J(B(m,n),D)$, либо супералгеброй $V_{1/2}(Z,D)$.*

Супералгебра векторного типа $J(\Gamma, D)$. Пусть Γ — унитальная ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с ненулевым четным дифференцированием D. Положим $J(\Gamma, D) = \Gamma \oplus \Gamma x$. Операция умножения $\cdot$ в $J(\Gamma, D)$ определяется по правилам

$$a\cdot b = ab, a\cdot bx = (ab)x, ax\cdot b = (-1)^{p(b)}(ab)x, ax\cdot bx = (-1)^{p(b)}(D(a)b - aD(b)),$$

где a, b однородные элемены из Γ и ab — произведение в Γ.

Лемма 1. *Пусть ϕ — нетривиальное δ-(супер)дифференцирование супералгебры $J(\Gamma, D)$, тогда $\delta = \frac{1}{2}$ и $\phi(y) = z \cdot y$ для фиксированного $z \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.*

Супералгебра $V_{1/2}(Z,D)$. Пусть Z — ассоциативно-коммутативная F-алгебра с единицей e и дифференцированием $D : Z \to Z$, удовлетворяющая двум условиям

i) Z не имеет собственных D-инвариантных идеалов,

ii) D обнуляет только элементы вида Fe.

Рассмотрим Zx как изоморфную копию алгебры Z. Определим на векторном пространстве $V(Z,D) = Z + Zx$ структуру супералгебры. Положим $A = Z$ и $M = Zx$ — соответственно четная и нечетная части. Умножение $\cdot$ зададим следующим образом

$$a \cdot b = ab, a \cdot bx = \frac{1}{2}(ab)x, ax \cdot bx = D(a)b - aD(b),$$

для произвольных элементов $a, b \in Z$. Полученную супералгебру будем обозначать как $V_{1/2}(Z,D)$.

Лемма 2. *Пусть ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование супералгебры $V_{1/2}(Z,D)$, тогда $\delta = \frac{1}{2}$ и $\phi(y) = (1 + p(y))z \cdot y$ для фиксированного $z \in A \setminus \{Fe\}$.*

Лемма 3. *Пусть ϕ — нетривиальное нечетное δ-супердифференцирование супералгебры $V_{1/2}(Z,D)$, тогда $\delta = \frac{1}{2}$ и $\phi(A) = 0, \phi(ax) = az$ для фиксированного $z \in A$.*