Мальцевские чтения
Новосибирск (2000)
Тезисы докладов

Проблема вхождения для бимодулей над кольцами многочленов

Ш. У. Абуталипова

Пусть K — произвольное поле, $A = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Известно, что совместность системы линейных уравнений над A алгоритмически распознаваема [**1**]. В связи с исследованием двусторонних линейных уравнений [**2**] возникает необходимость исследования следующей задачи. Пусть $C = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ — кольцо многочленов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, $A = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $B = K[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ — соответствующие подалгебры алгебры C. Через M обозначим свободный C-модуль с базой $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Рассмотрим конечно порожденный A-подмодуль F и конечно порожденный B-подмодуль G модуля M. Тогда возникает алгоритмическая задача о распознаваемости вхождения элемента $m \in M$ в сумму $F + G$.

Теорема 1. *Проблема вхождения в сумму для конечно порожденного $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$-подмодуля и для конечно порожденного $K[y_1,\ y_2, \ldots, y_n]$-подмодуля свободного модуля над кольцам многочленов $K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ алгоритмически разрешима.*

Аналогичная задача алгоритмически неразрешима (см. [**3**]), если K — поле характеристики 0 и в C выполняются соотношения

$$(x_i - y_i)(x_j - y_j) = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Теорема 2. *Проблема вхождения в сумму конечно порожденного левого и конечно порожденного правого подмодуля свободного бимодуля над кольцам многочленов алгоритмически разрешима.*

С использованием машин Минского [**4**] доказывается

Теорема 3. *Существует конечно порожденный A-подмодуль F, конечно порожденный B-подмодуль G, конечно порожденный*

C-подмодуль H и конечномерное подпространство T модуля M такие, что проблема вхождения в сумму

$$F + G + H + T$$

алгоритмически неразрешима.

Литература

[1] A. Seidenberg, *Constructions in algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **197** (1974), 273–313.

[2] Ш. У. Абуталипова, *Линейные уравнения над относительно свободными ассоциативными алгебрами*, Наука и образование Южного Казахстана, экон. матем. **6** (1997), 225–229.

[3] М. В. Сапир и О. Г. Харлампович, *Проблема равенства в многообразиях ассоциативных алгебр и алгебр Ли*, Изв. ВУЗов, матем. (1989), no. 6, 76–84.

[4] А. И. Мальцев, *Алгоритмы и рекурсивные функции*, Наука, Москва, 1986.

Южно-Казахстанский государственный университет
E-mail: `ukgulib-shm@kaznet.kz`