Мальцевские чтения
Новосибирск (2000)
Тезисы докладов

Алгебраические множества над абелевыми и нильпотентными группами без кручения и их координатные группы

Ю. М. Ашаева

Основной понятийный аппарат был разработан тремя авторами Г. Баумслагом, А. Мясниковым, В. Ремесленниковым и изложен в статье [**1**]. Как и в классической алгебраической геометрии, одним из основных вопросов является описание алгебраических множеств. В работе [**2**] удалось получить полное описание алгебраических множеств только для абелевых групп.

Теорема 1. *Пусть $Y \subseteq G^n$ — алгебраическое множество. Тогда с точностью до изоморфизма алгебраических множеств Y имеет вид*:

$$Y \cong (G[e_1], \ldots, G[e_r], G, \ldots, G),$$

где $e_i \in \mathbb{N}$, $e_i | e_{i+1}$, $i = 1, \ldots, r-1$, $r \leqslant n$ и $G[m]$ — m-слой группы G.

Для нильпотентных групп был выделен класс систем уравнений, называемых невырожденными, множества решений которых имеют хорошее описание:

Определение. Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество букв. Уравнением над G называется слово $s(\overline{x}, \overline{g})$ группы $G[X] = G \underset{c}{*} F(X)$, где $\underset{c}{*}$ — свободное нильпотентное произведение ступени c.

Определение. Матрицей системы $S = \{s_i = 1 \mid i = 1, \ldots, r\}$ называется целочисленная матрица $[S] = (\alpha_{ij})$, где α_{ij} есть сумма показателей при букве x_j в уравнении s_i.

Определение. Невырожденной системой уравнений называется система S такая, что в матрице системы найдется по крайней мере один ненулевой минор ранга r.

Мы говорим, что система записана в каноническом виде, если главный минор ее матрицы является ненулевым и диагональным. Невырожденная система уравнений приводится к каноническому виду с помощью эквивалентных преобразований, соответствующих элементарным преобразованиям над матрицей системы S.

Теорема 2. *Пусть S — невырожденная система уравнений над конечно порожденной нильпотентной группой G без кручения, состоящая из r уравнений от n неизвестных и записанная в канонической форме. Тогда проекция множества решений системы S на последние $n-r$ координат, отвечающим свободным переменным, содержит класс смежности по подгруппе конечного индекса группы G^{n-r}.*

Пусть $g_1, \dots, g_k$ — порождающие группы G. Обозначим через $G^{(m)}$ подгруппу группы G, порожденную элементами g_i^m, $i = 1, \dots, k$.

Теорема 3. *Пусть S — невырожденная система уравнений над конечно порожденной нильпотентной группой G без кручения, состоящая из r уравнений от n неизвестных и записанная в канонической форме. Если S совместна, то существует конечное число классов смежности по подгруппе $\left(G^{(m)}\right)^s$, $s = n-r$, так, что если свободным переменным $x_{r+1}, \dots, x_n$ придадим произвольные значения из этих классов смежности и подставим их в систему G, то полученная система является совместной и имеет единственное решение.*

Любое решение системы S может быть получено таким образом.

Известно, что в классической алгебраической геометрии задача описания алгебраических множеств и задача описания их координатных колец эквивалентны. Этот факт верен и для алгебраической геометрии над группами [**1**].

В связи с полученными результатами В. Н. Ремесленников высказал ряд предположений, которые были доказаны. Их формулировки следуют далее.

Теорема 4. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, H — конечно порожденная нильпотентная G-группа без кручения. Группа H является координатной* *группой для некоторого алгебраического множества* Y, *определенного совместной невырожденной системой* S *над группой* G, *тогда и только тогда, когда в группе* H *имеется свободная* G-*подгруппа* H_0 *конечного индекса.*

Теорема 5. *Радикал* $\mathrm{Rad}(S)$ *совместной невырожденной системы уравнений* S *над нильпотентной группой без кручения совпадает с изолятором нормального замыкания системы* S *в группе* $G[X]$.

Литература

[1] G. Baumslag, A. Myasnikov, and V. Remeslennikov, *Algebraic geometry over groups*, I, J. Algebra **219** (1999), 16–79.

[2] Ю. М. Федосеева, *Алгебраические множества над абелевыми и нильпотентными группами*, Дисс. канд.физ.-мат. наук, Омск, 1998.

Омский государственный университет
E-mail: ashaeva@math.omsu.omskreg.ru