Мальцевские чтения
Новосибирск (2000)
Тезисы докладов

Строение нижнего ниль-радикала ассоциативной конформной алгебры

П. С. Колесников и И. В. Львов

Определение 1. Ассоциативной конформной алгеброй называется (см., например, [**1, 2**]) модуль C над полиномиальным кольцом $K[D]$ (K — поле характеристики 0), снабженный семейством билинейных операций $\circ_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, если выполняются следующие аксиомы:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(C1)} & (\forall x, y \in C)(\exists N \in \mathbb{Z}_+)(\forall n \geqslant N) x \circ_n y = 0, \\
\text{(C2)} & D(x \circ_n y) = Dx \circ_n y + x \circ_n Dy, \\
\text{(C3)} & Dx \circ_n y = -nx \circ_{n-1} y, \\
\text{(C4)} & (x \circ_n y) \circ_m z = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} x \circ_{n-s} (y \circ_{m+s} z).
\end{array}
$$

В дальнейшем мы будем опускать прилагательное “ассоциативная”.

Введем обычные определения для случая конформных алгебр.

Определение 2. (1) Пусть $M_1, M_2 \subseteq C$. Определим

$$M_1 \cdot M_2 := \Big\{ \sum_i m_i^1 \circ_{n_i} m_i^2 : n_i \geqslant 0 \Big\}.$$

(2) Конформная подалгебра $I \subseteq C$ является *идеалом* конформной алгебры C, если $C \cdot I, I \cdot C \subseteq I$.

Отметим, что произведение $(\cdot)$ идеалов конформной алгебры ассоциативно: $I \cdot (J \cdot K) = (I \cdot J) \cdot K$ для любых трех идеалов I, J, K.

(3) Идеал I конформной алгебры C называется *первичным*, если для любых идеалов J_1, J_2 из $J_1 \cdot J_2 \subseteq I$ следует $J_i \subseteq I$ хотя бы для одного $i \in \{1, 2\}$.

(4) Элемент $a \in C$ называется нильпотентным, если

$$a^n := \{a\} \cdot (\{a\} \cdot \dots \cdot (\{a\} \cdot \{a\}) \dots) = \{0\}$$

для некоторого $n > 0$.

(5) Идеал I является *нильпотентным* [**1**], если $I^n = \{0\}$ для некоторого $n > 1$. Если все элементы $a \in I$ нильпотентны, то I называется *ниль-идеалом.*

(6) Идеал I называется (*нижним*) *ниль-радикалом* конформной алгебры C, если I является (наименьшим) ниль-идеалом таким, что C/I не содержит ненулевых нильпотентных идеалов.

(7) Конформная алгебра называется *первичной*, если нулевой идеал в ней первичен; *полупростой*, если она не содержит ненулевых нильпотентных идеалов.

Нижний ниль-радикал ассоциативной конформной алгебры может быть построен с помощью индуктивного процесса, аналогично "классическому" случаю (см., например, [**3**]). Положим $\mathfrak{N}_0 = \{0\} \subset C$. Пусть для некоторого ординала γ построено множество $\mathfrak{N}_\gamma$, и $\mathcal{B}_\gamma = \{I \triangleleft C \mid I \supseteq \mathfrak{N}_\gamma,\ I/\mathfrak{N}_\gamma$ нильпотентен в $\mathrm{C}/\mathfrak{N}_\gamma\}$. Положим $\mathfrak{N}_{\gamma+1} = \sum\limits_{I \in \mathcal{B}_\gamma} I$. Для предельного ординала β положим $\mathfrak{N}_\beta = \sum\limits_{\gamma<\beta} \mathfrak{N}_\gamma$. На некотором шаге $\mathfrak{N}_\tau = \mathfrak{N}_{\tau+1} = \mathcal{L}$. Полученный идеал $\mathcal{L}$ и есть нижний ниль-радикал ассоциативной конформной алгебры C. Он содержится в любом идеале, фактор по которому не имеет ненулевых нильпотентных идеалов.

Оказывается, что для ассоциативных конформных алгебр имеет место утверждение, хорошо известное для "классических" алгебр.

Теорема. *Нижний ниль-радикал конформной алгебры совпадает с пересечением первичных идеалов.*

Для доказательства этого утверждения докажем сперва следующую лемму.

Лемма. *Пусть I — такой идеал C, что C/I не имеет ненулевых нильпотентных идеалов, и J — идеал, строго содержащий I. Тогда существует первичный идеал $\mathfrak{p}$ такой, что $I \subseteq I$, $J \nsubseteq \mathfrak{p}$.*

Доказательство. Выберем некоторый элемент $b_0 \in J \setminus I$. Так как C/I не содержит ненулевых нильпотентных идеалов, существуют $c_0 \in C$, $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}_+$ такие, что $b_1 = b_0 \circ_{n_0} (c_0 \circ_{m_0} b_0) \notin I$ (иначе главный идеал, порожденный образом b_0 в C/I, нильпотентен). По индукции строим последовательность $\{b_k\}_{k\geqslant 0}$: $b_{k+1} =$

$b_k \circ_{n_k} (c_k \circ_{m_k} b_k)$, где $c_k \in C$, $n_k, m_k \in \mathbb{Z}_+$ подбираются так, чтобы $b_{k+1} \notin I$.

Рассмотрим множество $\mathcal{M} = \{K \triangleleft C \mid I \subseteq K,\ K \cap \{b_k\} = \varnothing\}$. Имеем $I \in \mathcal{M} \neq \varnothing$. Поскольку это множество удовлетворяет условию леммы Цорна, в нем существует максимальный элемент $\mathfrak{p}$.

Покажем, что $\mathfrak{p}$ является первичным идеалом. Предположим, что $\mathfrak{c}, \mathfrak{d} \triangleleft C$, $\mathfrak{c}, \mathfrak{d} \nsubseteq \mathfrak{p}$. Тогда $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c} + \mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}$ и, следовательно, существует b_s такой, что $b_s \in \mathfrak{c}'$. Аналогично, существует $b_k \in \mathfrak{d}'$. Полагая для определенности $s \leqslant k$, получаем, что $b_k \in \mathfrak{c}' \cap \mathfrak{d}'$. Значит, $b_{k+1} = b_k \circ_{n_k} (c_k \circ_{m_k} b_k) \in \mathfrak{c}' \cdot \mathfrak{d}' \notin \mathfrak{p}$. Таким образом, $\mathfrak{c}' \cdot \mathfrak{d}' \nsubseteq \mathfrak{p}$. Поскольку $(\mathfrak{c} + \mathfrak{p}) \cdot (\mathfrak{d} + \mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{d} + \mathfrak{p}$, имеем $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{d} \nsubseteq \mathfrak{p}$. Лемма доказана. □

Так как $\mathcal{L}$ содержится в любом первичном идеале, получаем $\mathcal{L} \subseteq \cap\mathfrak{p}$. Если это вложение строгое, то по лемме существует первичный $\mathfrak{q} \triangleleft C$ такой, что $\mathcal{L} \subset \mathfrak{q}$, но $\cap\mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{q}$. Противоречие.

Поскольку в полупростой конформной алгебре нижний ниль-радикал нулевой, имеет место

Следствие. *Полупростая конформная алгебра разлагается в подпрямую сумму первичных.*

Конформная алгебра C называется коммутативной, если для любых $a, b \in C$ выполняется равенство

$$\text{(C5)} \quad a \circ_n b = \sum_{s \geqslant 0} \frac{(-1)^{n+s}}{s!} D^s (b \circ_{n+s} a).$$

Поскольку конечно порожденные коммутативные конформные алгебры удовлетворяют условию обрыва возрастающих цепей идеалов (нетеровы), заключаем, что нижний ниль-радикал конечно порожденной коммутативной конформной алгебры нильпотентен.

Литература

[1] A. de Andrea and V. G. Kac, *Structure theory of finite conformal algebras*, Select. Math. **4** (1998), 377–418.

[2] M. Roitman, *On free conformal and vertex algebras*, J. Algebra **217** (1999), 496–527.

[3] Н. Джекобсон, *Строение колец*, ИЛ, Москва, 1961.

Институт математики СО РАН
E-mail: pavelkolesnikov@yandex.ru

Институт математики СО РАН
E-mail: lvov@math.nsc.ru