Мальцевские чтения
Новосибирск (2000)
Тезисы докладов

О марковских свойствах многообразий нильполугрупп

В. Ю. Попов

В работах [**1, 2**] А. А. Марков предложил весьма общий подход к изучению алгоритмических проблем на языке распознаваемости абстрактных свойств, впоследствии получивших название марковских свойств. Абстрактное свойство алгебраических систем из класса $\mathbb{K}$ называется марковским, если существуют две конечно определенные в $\mathbb{K}$ системы, одна из которых обладает этим свойством, а другая не вложима изоморфно ни в какую конечно определенную в $\mathbb{K}$ систему с этим свойством [**3**]. Соответствующий вопрос мы сформулируем как алгоритмическую проблему, которую будем называть *проблемой распознавания марковских свойств*:

Существует ли алгоритм, который по конечному заданию алгебраической системы из класса $\mathbb{K}$ *отвечает на вопрос, обладает ли она некоторым наперед заданным марковским свойством?*

Неразрешимость проблемы распознавания марковских свойств для любого марковского свойства установлена для полугрупп [**2**], групп [**4**], ассоциативных алгебр [**5**], алгебр Ли [**6**]. В свете результата из [**2**] естественно ставить вопрос о разрешимости проблемы распознаваемости марковских свойств для наиболее интересных классов полугрупп. Неразрешимость этой проблемы для любого марковского свойства полугрупп с сокращением доказана в работе [**7**], инволютированных и инверсных полугрупп анонсирована в [**3**]. Одним из важнейших классов полугрупп является класс нильполугрупп, т. е. полугрупп, у которых некоторая степень каждого элемента равна нулю. Начало систематического изучения нильполугрупп было положено Л. Н. Шевриным в работах [**8**] и [**9**]. Нильполугруппы часто используются в качестве "строительного материала" для построения полугрупп (см., например, [**10**]) и возникают в виде факторов периодических полугрупп.

Типичные примеры, демонстрирующими важность нильполугрупп для теории многообразий, приведены в работах [**11, 12**]. Решение многих алгоритмических проблем для полугрупп тесно связано с изучением свойств нильполугрупп (см. [**13**]). Следующая теорема устанавливает алгоритмическую нераспознаваемость марковских свойств для многообразия $\mathfrak{N}_2$ нильполугрупп ступени 2, т. е. многообразия, заданного тождеством $x^2 = 0$ или системой тождеств $x^2y = yx^2 = x^2$.

Теорема. *Проблема распознавания марковских свойств многообразия $\mathfrak{N}_2$ для любого марковского свойства неразрешима.*

Следуя [**13**], проблемой конечности назовем вопрос о существовании алгоритма, определяющего по произвольной конечно определенной в многообразии $\mathfrak{X}$ полугруппе, является ли она конечной, а проблемой тривиальности — вопрос о существовании алгоритма, определяющего по произвольной конечно определенной в многообразии $\mathfrak{X}$ полугруппе, является ли она одноэлементной. Поскольку свойства полугрупп "быть конечной" и "быть одноэлементной" являются марковскими, из теоремы с очевидностью вытекает утвердительный ответ на вопрос 3.10 из [**13**]. А именно, справедливо

Следствие. *В многообразии $\mathfrak{N}_2$ проблема тривиальности (конечности) неразрешима.*

Литература

[1] А. А. Марков, *Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем*, Докл. Акад наук СССР **77** (1951), no. 1, 19–20.

[2] А. А. Марков, *Теория алгорифмов*, Труды Мат. ин-та Акад. наук СССР **42** (1954), 1–376.

[3] Ю. М. Важенин, *Об алгоритмической нераспознаваемости марковских свойств для некоторых классов полугрупп*, Второй Всесоюзный симпозиум по теории полугрупп. Тезисы сообщений, Свердловск, 1978, с. 14.

[4] С. И. Адян, *Конечно определенные группы и алгоритмы*, Докл. Акад. наук СССР **117** (1957), no. 1, 9–12.

[5] Л. А. Бокуть, *Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем для ассоциативных колец*, Алгебра и логика **9** (1970), no. 2, 137–144.

[6] Л. А. Бокуть, *Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем для алгебр Ли*, Алгебра и логика **13** (1974), no. 2, 145–152.

[7] J. W. Addison, *One Some Points of the Theory of Recursive Functions*, Dissertation, Univ. Wisconsin, 1954.

[8] Л. Н. Шеврин, *Нильполугруппы с некоторыми условиями конечности*, Матем. сб. **55** (1961), no. 4, 473–480.

[9] Л. Н. Шеврин, *К общей теории полугрупп*, Матем. сб. **53** (1961), no. 3, 367–386.

[10] Л. Н. Шеврин, *Квазипериодические полугруппы, разложимые в связку архимедовых полугрупп*, 16-я Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы докладов, ч. 1, Ленинград, 1981. с. 188.

[11] D. R. Bean, A. Ehrenfeucht, and G. McNulty, *Avoidable patterns in strings of symbols*, Pacific J. Math. **85** (1979), 261–294.

[12] М. В. Сапир и Е. В. Суханов, *О многообразиях периодических полугрупп*, Изв. ВУЗов, матем. (1981), no. 4, 48–55.

[13] O. G. Kharlampovich and M. V. Sapir, *Algorithmic problems in varieties*, Internat. J. Algebra Comput. **5** (1995), no, 4–5, 379–602.

Уральский государственный университет