Мальцевские чтения
Новосибирск (2000)
Тезисы докладов

Σ-допустимые семейства над линейными порядками

А. И. Стукачев

Аналогом рекурсивной перечислимости в обобщенной теории рекурсии служит понятие Σ-определимости. В [**1**] было предложено естественное расширение класса Σ-подмножеств допустимого множества до так называемых Σ-допустимых семейств. В настоящем докладе рассматриваются подмножества и семейства, которые могут служить базисом для образования Σ-допустимых семейств.

Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Подмножество $P \subseteq A$ называется Σ_*-множеством, если $\Gamma(P) = \bigcup\limits_{\pi \subseteq P} \Gamma(\pi)$ для любого одноместного Σ-оператора Γ. Это понятие может быть обобщено следующим образом: пусть $\mathcal{P}$ — некоторое семейство подмножеств $\mathbb{A}$. Семейство $\mathcal{P}$ называется *Σ-регулярным*, если для любого натурального n и любых $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}$

$$\Gamma(P_1, \ldots, P_n) = \bigcup_{\pi_1 \subseteq P_1} \cdots \bigcup_{\pi_n \subseteq P_n} \Gamma(\pi_1, \ldots, \pi_n)$$

для любого n-местного Σ-оператора Γ.

Если $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — произвольные семейства подмножеств из $\mathbb{A}$, то отношение сводимости определяется так: $\mathcal{Q} \leqslant_\Sigma \mathcal{P}$, если для любого $Q \in \mathcal{Q}$ существуют $n \in \omega$ и подмножества $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}$ такие, что $Q = \Gamma(P_1, \ldots, P_n)$ для некоторого n-местного Σ-оператора Γ.

Теорема 1. *Если $\mathcal{Q} \leqslant_\Sigma \mathcal{P}$, и $\mathcal{P}$ — Σ-регулярное семейство, то семейство $\mathcal{Q}$ также является Σ-регулярным.*

Для семейства $\mathcal{P}$ определяется семейство $\widehat{\mathcal{P}} = \bigcup\limits_{\mathcal{Q} \leqslant_\Sigma \mathcal{P}} \mathcal{Q}$. Имеет место

Теорема 2. *Если $\mathcal{P}$ — Σ-регулярное семейство, то семейство $\widehat{\mathcal{P}}$ является Σ-допустимым.*

Рассматриваются допустимые множества вида $HYP(\mathfrak{M})$, где модель $\mathfrak{M}$ рекурсивно насыщена. Теорема 3 — основной результат доклада — позволяет описать подмножества модели $\mathfrak{M}$, которые являются Σ_*-множествами в $HYP(\mathfrak{M})$.

Определение 1. Подмножество $P \subseteq M^n$ *фундаментально* в $\mathfrak{M}$, если для любой P-позитивной формулы $\varphi(\overline{x})$ сигнатуры $\sigma \cup \{P\}$ и элементов $\overline{a}$ из M выполняется следующее: если $\langle \mathfrak{M}, P\rangle \models \varphi(\overline{a})$, то $\langle \mathfrak{M}, D\rangle \models \varphi(\overline{a})$ для некоторого определимого подмножества $D \subseteq P$.

Определение 2. Подмножество $P \subseteq M^n$ называется *внутренним* для модели $\mathfrak{M}$, если всякое локально выполнимое в $\langle \mathfrak{M}, P\rangle$ рекурсивное множество $\{\psi(\overline{x}, \overline{c}) | n \in \omega\}$ P-негативных формул сигнатуры $\sigma \cup \{P\}$ выполнимо в $\langle \mathfrak{M}, P\rangle$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — рекурсивно насыщенная модель. Подмножество $P \subseteq M^n$ является Σ_*-множеством в $HYP(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда P — внутреннее и фундаментальное в $\mathfrak{M}$.*

Пусть $\mathfrak{L}$ — модель плотного линейного порядка. Теорема 3 применяется для описания подмножеств $\mathfrak{L}$, которые являются Σ_*-множествами в допустимом множестве $HYP(\mathfrak{L})$.

Через $\mathfrak{L}^*$ обозначим дедекиндово пополнение $\mathfrak{L}$. С каждым подмножеством $P \subseteq L$ свяжем функцию $\mathrm{char}(P) : L^* \to \{-1, 0, 1\}$ следующим образом: для всякого $\xi \in L^*$ полагаем

$$\mathrm{char}(P)(\xi) = \begin{cases} -1, & \text{если } \xi \in \mathrm{Lim}_-(P) \setminus \mathrm{Lim}_+(P), \\ 1, & \text{если } \xi \in \mathrm{Lim}_+(P) \setminus \mathrm{Lim}_-(P), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Подмножество $P \subseteq L$ называется *локально определимым*, если для любого $q \in L \cup \{\pm\infty\}$ существует окрестность O точки q такая, что $P \cap O$ определимо (окрестностью точки $q \in L$ называется любое подмножество, содержащее интервал вида (l, r) такой, что $q \in (l, r)$, и соответствующие полуинтервалы для $q = \pm\infty$).

Теорема 4. *Подмножество $P \subseteq L$ фундаментально в $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда P локально определимо. Подмножество $P \subseteq L^n$, $n > 1$ фундаментально в $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда, для любого определимого $D \subseteq L^n$, семейство проекций $\{\pi_1(P \cap D), \ldots, \pi_n(P \cap D)\}$ является фундаментальным.*

Лемма 1. *Пусть* $P_1 \subseteq L, \dots, P_n \subseteq L$ — *фундаментальные подмножества в* $\mathfrak{L}$. *Семейство* $\{P_1, \dots, P_n\}$ *является фундаментальным тогда и только тогда, когда* $d(\{P_1, \dots, P_n\}) \leqslant 1$, *где*

$$d(\mathcal{P}) = \max\{\rho(P, Q) | P, Q \in \mathcal{P}\},$$
$$\rho(P, Q) = \max_{\xi \in L^* \setminus L} |\operatorname{char}(P)(\xi) - \operatorname{char}(Q)(\xi)|.$$

Пусть $S \subseteq L$ — произвольное подмножество. Определим на нем отношение эквивалентности следующим образом: для двух элементов s_1, s_2 таких, что $s_1 < s_2$, полагаем $s_1 \sim s_2$, если интервал (s_1, s_2) содержит лишь конечное число элементов из S. Через $\mathfrak{B}(S)$ обозначим систему $\langle S/\sim, <\rangle$, в которой порядок индуцирован порядком в $\mathfrak{L}$.

Теорема 5. *Пусть подмножество* $P \subseteq L$ *фундаментально. Подмножество* P *внутреннее тогда и только тогда, когда для любых элементов* $a, b \in L \cup \{\pm\infty\}$ *таких, что* $\operatorname{char}(P \cap (a, b))(a) = -1$ *и* $\operatorname{char}(P \cap (a, b))(b) = 1$, *выполняется следующее условие: если для любого* $q \in (a, b)$ *имеет место* $\operatorname{char}(P \cap (a, b))(q) = 0$, *то либо* $P \cap (a, b)$ *конечно, либо* $\mathfrak{B}(P \cap [a, b])$ — *плотный линейный порядок.*

Литература

[1] Ю. Л. Ершов, *Определимость и вычислимость*, Научная книга, Новосибирск, 1996.

Новосибирский государственный университет
E-mail: aistu@math.nsc.ru