Базисы Гребнера — Ширшова универсальных обертывающих простых конформных супералгебр Ли серии W_N

П. С. Колесников

Теория конформных алгебр была изначально построена для описания сингулярной части расширенного операторного произведения (OPE) киральных полей в физической теории конформных полей [**1**]. Алгебраическое определение категорий конформных алгебр было введено в [**2**], формальное аксиоматическое определение можно найти в [**3**].

В работе [**4**] была проведена классификация простых конформных алгебр Ли конечного типа, а в работе [**5**] — классификация простых конформных супералгебр конечного типа над полем $\mathbb{C}$. Все такие алгебры являются подалгебрами конформной супералгебры W_N, которая порождена как модуль базисными элементами алгебры Грассмана $\Lambda(N)$ от N переменных и супералгебры $W(N) = \operatorname{Der}\Lambda(N)$ всех дифференцирований $\Lambda(N)$. Именно, $W_N = \mathbf{k}[D]\otimes(\Lambda(N)\oplus W(N))$, где

$$a\boxed{0}b = [a,b], \quad a\boxed{0}f = a(f), \quad a\boxed{1}f = (-1)^{p(a)p(f)+1}fa,$$
$$f\boxed{0}g = -D(fg), \quad f\boxed{1}g = -2fg(f,g\in\Lambda(N), \quad a,b\in W(N)).$$

Поскольку для конформных алгебр нет аналога теоремы Пуанкаре – Биркгоффа – Витта (так, например, свободная конформная алгебра Ли не вкладывается ни в какую ассоциативную), то базис универсальной обертывающей $U_L(W_N)$ ищется с помощью леммы о композиции для конформных алгебр [**6, 7**] (L — некоторая функция локальности).

Пусть $\Lambda(N) = \Lambda[\xi_1,\dots\xi_N]$, а через v обозначим единицу алгебры Грассмана. Кроме того, дифференцирование по переменной ξ_i будем обозначать через ∂_i.

Найден базис Гребнера — Ширшова для $U_L(W_N)$, соответствующий минимальной функции локальности L, для которой отображение $W_N \to U_L(W_N)$ инъективно, а именно

$$L(v,\xi_i) = L(v,\partial_j) = L(v,v) = 2,$$
$$L(\xi_i,\xi_j) = \begin{cases} 2, & i\neq j, \\ 0, & i=j, \end{cases}, \quad L(\partial_i,\partial_j) = \begin{cases} 1, & i\neq j, \\ 0, & i=j, \end{cases},$$
$$L(\xi_i,\partial_j) = 2, \quad L(\partial_j,\xi_i) = 1.$$

Искомый базис Гребнера — Ширшова имеет вид

$$\xi_i \circ^1 \xi_j = -\xi_j \circ^1 \xi_i, \quad \xi_i \circ^0 \xi_j = -\xi_j \circ^0 \xi_i, \quad i>j,$$
$$\xi_i \circ^0 \xi_i = \xi_i \circ^1 \xi_i = 0,$$
$$v \circ^1 v = v, \quad \xi_i \circ^0 v = v \circ^0 \xi_i, \quad \xi_i \circ^1 v = \xi_i, \quad v \circ^1 \xi_i = \xi_i,$$
$$\partial_j \circ^1 v = 0, \quad \partial_j \circ^1 \xi_i = 0, \quad v \circ^1 \partial_j = \partial_j,$$
$$\partial_i \circ^1 \partial_j = 0, \quad \partial_i \circ^0 \partial_j = -\partial_j \circ^0 \partial_i,\ i>j, \quad \partial_i \circ^0 \partial_i = \partial_i \circ^1 \partial_i = 0,$$
$$\partial_i \circ^0 \xi_j + \xi_j \circ^0 \partial_i - D(\xi_j \circ^1 \partial_i) = v\delta_{ij}, \quad \partial_i \circ^0 v - v \circ^0 \partial_i + D\partial_i = 0,$$
$$v \circ^0 \xi_{i_1} \circ^0 \dots \circ^0 \xi_{i_k} \circ^1 \xi_{i_{k+1}} = \xi_{i_1} \circ^0 \dots \circ^0 \xi_{i_{k-1}} \circ^1 \xi_{i_k} \circ^1 \xi_{i_{k+1}},$$
$$i_1 < \dots < i_{k+1},$$
$$v \circ^0 \xi_{i_1} \circ^0 \dots \circ^0 \xi_{i_k} \circ^1 \partial_j = \xi_{i_1} \circ^0 \dots \circ^0 \xi_{i_{k-1}} \circ^1 \xi_{i_k} \circ^1 \partial_j,\ i_1 < \dots < i_k,$$
$$\partial_i \circ^0 v \circ^0 x = v \circ^0 \partial_i \circ^0 x,\ x\in\{v,\xi_k,\partial_j\},$$
$$\partial_i \circ^0 \xi_j \circ^0 \xi_k + \xi_j \circ^0 \partial_i \circ^0 \xi_k = \delta_{ij} v \circ^0 \xi_k,\ j\neq k,$$
$$\partial_i \circ^0 \xi_j \circ^1 \xi_k + \xi_j \circ^1 \partial_i \circ^0 \xi_k = \delta_{ij} \xi_k,\ j\neq k,$$
$$\partial_i \circ^0 \xi_j \circ^0 \partial_k + \xi_j \circ^0 \partial_i \circ^0 \partial_k = \delta_{ij} v \circ^0 \partial_k,$$
$$\partial_i \circ^0 \xi_j \circ^1 \partial_k + \xi_j \circ^1 \partial_i \circ^0 \partial_k = \delta_{ij} \partial_k.$$
$$\xi_i \circ^1 (\xi_j \circ^0 x) = 2\xi_i \circ^0 (\xi_j \circ^1 x), \quad i<j, \quad x\in\{\xi_k,\partial_k\},\ x>\xi_j.$$

Соответственно, линейный базис $U_L(W_N)$ состоит из конформных слов вида

$$u^{(0)}_{n,s,q} := [\underbrace{v \circ^0 \dots \circ^0 v \circ^0}_{n\ \text{раз}} \xi_{i_1} \circ^0 \dots \circ^0 \xi_{i_s} \circ^0 \partial_{j_1} \circ^0 \dots \circ^0 \partial_{j_q}], \quad n>0,$$
$$u^{(1)}_{r,s,q} := [\xi_{i_1} \circ^0 \dots \circ^0 \xi_{i_r} \circ^1 \xi_{i_{r+1}} \circ^1 \dots \circ^1 \xi_{i_s} \circ^1 \partial_{j_1} \circ^0 \dots \circ^0 \partial_{j_q}], \quad r>0,$$

где $i_1 < \dots < i_r < \dots i_{r+1} < i_s$, $j_1 < \dots < j_q$.

Литература

[1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nuclear Phys.* **241** (1984), 333–380.

[2] A. Beilinson and V. Drinfeld, *Chiral Algebras* (preprint).

[3] V. G. Kac, *Vertex Algebras for Beginners*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[4] A. D'Andrea and V. G. Kac, Structure theory of finite conformal algebras, *Selecta Math.* **4** (1998), no. 3, 377–418.

[5] D. Fattory and V. G. Kac, *Classification of Finite Conformal Superalgebras* (preprint).

[6] L. A. Bokut, Y. Fong, and W.-F. Ke, Groebner–Shirshov bases and composition lemma for associative conformal algebras: an example, *Contemp. Math.* **264** (2000), 63–90.

[7] Л. А. Бокуть, Ю. Фонг, В.-Ф. Ке и П. С. Колесников, Базисы Гребнера — Ширшова в алгебре и конформные алгебры, *Фундам. прикл. матем.* **6** (2000), no. 3, 669–706.

Институт математики СО РАН

E-mail address: pavelsk@math.nsc.ru