Замечание об отделимости подгрупп в классе конечных π-групп

Е. В. Соколов

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним (см. [**1**]), что группа X называется аппроксимируемой в классе $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $g \in X$ существует гомоморфизм группы X на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, переводящий g в элемент, отличный от 1. Подгруппа Y группы X называется отделимой в классе $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$-отделимой), если для всякого элемента $g \in X \setminus Y$ можно указать такой гомоморфизм φ группы X на группу из $\mathcal{K}$, что $g\varphi \notin Y\varphi$.

Очевидно, что если все группы из класса $\mathcal{K}$ в свою очередь аппроксимируемы в некотором классе $\mathcal{L}$, то каждая $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа является $\mathcal{L}$-аппроксимируемой. Очевидно также, что если $\mathcal{P}$ — гомоморфно замкнутый класс групп и в произвольной группе из класса $\mathcal{K}$ все $\mathcal{P}$-подгруппы (т. е. подгруппы, принадлежащие классу $\mathcal{P}$) являются $\mathcal{L}$-отделимыми, то из $\mathcal{K}$-отделимости всех $\mathcal{P}$-подгрупп произвольной группы X следует их $\mathcal{L}$-отделимость. Ситуация оказывается более сложной, если $\mathcal{L}$-отделимость $\mathcal{P}$-подгрупп данной группы зависит от того, как подгруппы расположены в этой группе. Примером может служить отделимость в классе конечных π-групп (π-отделимость).

Напомним, что если π — некоторое множество простых чисел, то подгруппа Y группы X называется π-изолированной в X, если для всякого элемента $g \in X$ и для всякого $q \in \pi$ из $g^q \in Y$ следует, что $g \in Y$. Наименьшая π-изолированная подгруппа, содержащая подгруппу Y группы X, называется π-изолятором Y. Как обычно, π' обозначает множество всех простых чисел, не принадлежащих π.

Легко видеть, что произвольная π-отделимая подгруппа должна быть π'-изолированной. Очевидно также, что π'-изолятор подгруппы Y содержит множество π'-корней из Y, т. е. множество всех таких элементов, которые в некоторой π'-степени лежат в Y.

Обратные утверждения, вообще говоря, не имеют места. Известно, однако, что для всякой подгруппы Y произвольной конечно порожденной нильпотентной группы без кручения множество π'-корней из Y является подгруппой (см., напр., [**2**, § 4]), причем π-отделимой [**3**]. Естественно возникает вопрос, справедливо ли аналогичное утверждение для подгрупп произвольной группы, аппроксимируемой в классе $\mathcal{N}$ всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения. В этом направлении получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть группа G аппроксимируема в классе $\mathcal{N}$. Тогда для каждой $\mathcal{N}$-подгруппы группы G множество π'-корней из этой подгруппы является π-отделимой $\mathcal{N}$-подгруппой. В частности, каждая π'-изолированная $\mathcal{N}$-подгруппа группы G π-отделима.*

Заметим, что хотя формулировка теоремы не требует явно отделимости конечно порожденных нильпотентных подгрупп группы G в классе $\mathcal{N}$, можно показать, что здесь это условие выполняется автоматически. Приведем два утверждения, непосредственно вытекающих из сформулированной теоремы.

Следствие 2. *Пусть группа G является прямым произведением семейства свободных групп. Тогда для каждой конечно порожденной абелевой подгруппы группы G множество π'-корней является π-отделимой конечно порожденной абелевой подгруппой.*

Следствие 3. *Пусть F — свободная группа, w — элемент группы F, порождающий в F свой централизатор, и $G = \langle F * X; w = x^n \rangle$ — свободное произведение с объединенной подгруппой группы F и бесконечной циклической группы X с порождающим x $(n \geqslant 1)$. Тогда для каждой циклической подгруппы группы G множество π'-корней является π-отделимой циклической подгруппой.*

Действительно, аппроксимируемость свободной группы в классе $\mathcal{N}$ хорошо известна, а для группы G из формулировки следствия 3 аналогичное утверждение доказано в работе [**4**].

Отметим также, что следствие 2 является обобщением известного результата о том, что всякая π'-изолированная циклическая подгруппа свободной группы является π-отделимой (см., например, [**5**]).

Литература

[1] А. И. Мальцев, О гомоморфизмах на конечные группы, *Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та.* **58** (1958), 49–60.

[2] Ф. Холл, Нильпотентные группы, *Математика. Период. сб. переводов иностр. статей* (1968), no. 1, 3–36.
[3] Е. Д. Логинова, Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами, *Сиб. матем. ж.* **40** (1999), no. 2, 395–407.
[4] G. Baumslag, On the residual nilpotence of certain one-relator groups, *Commun. Pure Appl. Math.* **21** (1968), no. 5, 491–506.
[5] Д. Н. Азаров, О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением, *Мат. заметки* **64** (1998), no. 1, 3–8.

Ивановский государственный университет
E-mail address: ev_sokolov@i1.ru