Теоретико-групповой континуальный аналог теорем сложения и умножения для одного обобщения функций Бесселя (ОФБ)

М. Д. Хриптун

Рассматриваются представления $Q(g)$ группы $\mathcal{G}$ треугольных матриц вида

$$g(r,s,\tau)=\begin{pmatrix} e^{i\tau} & 0 & r \\ 0 & e^{-(m-1)i\tau} & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g\in\mathcal{G}$$

в пространстве $\mathcal{F}(\lambda)=\int_0^\infty z^{\lambda-1}f(z)dz$ — преобразований Меллина финитных бесконечно дифференцируемых функций $f(z)$, равных нулю в некоторой окрестности точки $z=0$. Представления $Q(g)$ имеют вид интегралов, ядра которых при соответствующих значениях параметров r, s, τ выражаются через ОФБ

$$U_k(z,m)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z/m)^{k+mn}}{n!\Gamma[(m-1)n+k+1]}, \tag{1}$$

где $k=-(m-1)p$, p — комплексный параметр, $m=2,3,\ldots$, $\Gamma(t)$ — гамма-функция, $U_k(z,2)=I_k(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента (см. [**1**], формула (3)), удовлетворяющие дифференциальному уравнению m-го порядка вида

$$\left[(m-1)\frac{d}{dz}+\frac{k+1}{z}\right]\ldots\left[(m-1)\frac{d}{dz}+\frac{k+m+1}{z}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{d}{dz}-\frac{k}{z}\right)U_k(z,m)=U_k(z,m).$$

На основании этой связи, используя групповое равенство

$$g(r_1,s_1,0)g(r_2,s_2,0)=g(r_1+r_2,s_1+s_2,0),$$

получаем континуальный аналог теорем сложения для функций (1).

Теорема 1. *Если* $r_1, r_2 > 0$, $s_1, s_2 > 0$, $\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu > 0$, *то имеет место равенство*

$$\frac{1}{\pi \sin \pi\mu} \left[\frac{R(z_1, z_2, y)}{z_1^m y^{m-1}(1+y)}\right]^{\mu/m} U_{-\mu}\left(\left[R(z_1, z_2, y)\left(\frac{1}{y}+1\right)^{m-1}\right]^{1/m}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(z_1/z_2)^\nu y^{-\nu} U_{-\mu+\nu}(z_1) U_{-\nu}(z_2)}{\sin \pi(\mu-\nu)\sin \pi\nu} d\nu, \tag{2}$$

где

$$R(z_1, z_2, y) = z_1^m y^{m-1} + z_2^m, \quad z_1 = -m(r_1^{m-1} s_1)^{1/m},$$
$$z_2 = -m(r_2^{m-1} s_2)^{1/m}, \quad y = r_2/r_1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

В основе доказательства этой теоремы лежит замечание:

Если $Q(g_1)$ и $Q(g_2)$ являются интегральными операторами с ядрами $\mathcal{K}(\mu, g_1)$ и $\mathcal{K}(\mu, g_2)$, то, в силу группового свойства

$$Q(g_1 g_2) = Q(g_1) Q(g_2), \tag{3}$$

при условии абсолютной сходимости интегралов из (3), имеем соответствующее равенство для их ядер

$$\mathcal{K}(\mu, g_1 g_2) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{K}(\mu-\nu, g_1)\mathcal{K}(\nu, g_2) d\nu. \tag{4}$$

Используя (4) и подставляя вместо ядер соответствующие выражения их через ОФБ (1), получаем доказательство теоремы.

Сравнивая (2) с формулой обращения преобразования Меллина, получим из нее континуальную теорему умножения для ОФБ (1).

Литература

[1] М. Д. Хриптун, *Диф. уравнения* **11** (1975), no. 2, 287–293.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail address: `Khriptun@math.nsc.ru`