Алгебраический метод отыскания числа неэквивалентных циклических n-кратных накрытий над компактными связными плоскими трехмерными римановыми многообразиями

М. Н. Шматков

В работе [**1**] доказано, что с точностью до аффинного диффеоморфизма существует в точности 10 классов компактных связных плоских трехмерных римановых многообразий, из них шесть классов $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_4$, $\mathcal{M}_5$, $\mathcal{M}_6$ ориентируемых многообразий и четыре класса $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{N}_4$ неориентируемых (пространственные трехмерные Евклидовы формы).

Целью данной работы является нахождение числа неэквивалентных циклических n-кратных накрытий над произвольным компактным связным плоским трехмерным римановым многообразием M.

Для достижения этого путем отыскания числа решений соответствующей системы линейных сравнений по модулю n определяется число $H_M(n)$ гомоморфизмов фундаментальной группы $\pi_1(M)$ многообразия M в циклическую группу $\mathbb{Z}_n$. Затем с помощью определенной алгебраической техники, приведенной в работах [**2, 3**], восстанавливается число $N_M(n)$ циклических n-кратных накрытий над многообразием M.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Число неэквивалентных циклических n-кратных накрытий над произвольным компактным связным плоским трехмерным римановым многообразием M, в зависимости от принадлежности M одному из классов многообразий $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_4$, $\mathcal{M}_5$, $\mathcal{M}_6$, $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{N}_4$, определяется по следующим формулам:*

– *для класса* $\mathcal{M}_1$: *если* $n = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$, *где* $p_1 < \dots < p_k$ — *простые числа, то*

$$N_{\mathcal{M}_1}(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{2(\alpha_i-1)}(p_i^2+p_i+1),$$

– *для класса* $\mathcal{M}_2$:

$$N_{\mathcal{M}_2}(n) = \begin{cases} 1, & \textit{если } n \textit{ нечетно} \\ 7, & \textit{если } n = 2k,\ k \textit{ нечетно}, \\ 4, & \textit{если } n = 2^t k,\ t > 1, \end{cases}$$

– *для класса* $\mathcal{M}_3$:

$$N_{\mathcal{M}_3}(n) = \begin{cases} 1, & \textit{если } (3,n)=1, \textit{ т. е. неверно, что } 3|n, \\ 4, & \textit{если } n = 3k,\ (3,k)=1, \\ 3, & \textit{если } n = 3^t k,\ t > 1, \end{cases}$$

– *для класса* $\mathcal{M}_4$:

$$N_{\mathcal{M}_4}(n) = \begin{cases} 1, & \textit{если } n \textit{ нечетно}, \\ 3, & \textit{если } n = 2k,\ k \textit{ нечетно}, \\ 2, & \textit{если } n = 2^t k,\ t > 1, \end{cases}$$

– *для класса* $\mathcal{M}_5$:

$$N_{\mathcal{M}_5}(n) = 1 \quad \textit{для всех } n,$$

– *для класса* $\mathcal{M}_6$:

$$N_{\mathcal{M}_6}(n) = \begin{cases} 1, & \textit{если } n = 1, \\ 3, & \textit{если } n = 2, \\ 6, & \textit{если } n = 4, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

– *для класса* $\mathcal{N}_1$: *если* $n = 2^t p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$, *где* $2 < p_1 < \dots < p_k$ — *простые числа, то*

$$N_{\mathcal{N}_1}(n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k}(p_i^{\alpha_i}+p_i^{\alpha_i-1}), & \textit{если } t = 0, \\ 2\cdot\prod_{i=1}^{k}(p_i^{\alpha_i}+p_i^{\alpha_i-1}), & \textit{если } t = 1, \\ 3\cdot 2^t\cdot\prod_{i=1}^{k}(p_i^{\alpha_i}+p_i^{\alpha_i-1}), & \textit{если } t > 1, \end{cases}$$

– *для класса* $\mathcal{N}_2$: *если* $n = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$, *где* $p_1 < \dots < p_k$ — *простые числа, то*

$$N_{\mathcal{N}_2}(n) = \prod_{i=1}^{k}(p_i^{\alpha_i}+p_i^{\alpha_i-1}),$$

– *для класса* $\mathcal{N}_3$:

$$N_{\mathcal{N}_3}(n) = \begin{cases} 1, & \textit{если } n \textit{ нечетно}, \\ 7, & \textit{если } n = 2k,\ k \textit{ нечетно}, \\ 4, & \textit{если } n = 2^t k,\ t > 1, \end{cases}$$

– *для класса* $\mathcal{N}_4$:

$$N_{\mathcal{N}_4}(n) = \begin{cases} 1, & \textit{если } n \textit{ нечетно}, \\ 3, & \textit{если } n = 2k,\ k \textit{ нечетно}, \\ 6, & \textit{если } n = 2^2 k,\ k \textit{ нечетно}, \\ 4, & \textit{если } n = 2^t k,\ t > 2. \end{cases}$$

Литература

[1] J. Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, McGraw-Hill, 1967.

[2] P. Hall, The Eulerian functions of a group, *Quat. J. Math. Oxford* **7** (1936), 134–151.

[3] G. A. Jones, Counting subgroups of non-euclidean crystallographic groups, *Math. Scand.* **84** (1999), 23–39.

Институт Математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail address: `smn@math.nsc.ru`