Σ-допустимые семейства в структурах вида $\mathrm{HYP}(\mathfrak{M})$

А. И. Стукачев

Для допустимого множества $\mathbb{A}$ независимо Ершовым и Адамсоном были введены и изучались семейства подмножеств с определенным свойством Σ-допустимости (+-допустимости в терминологии Адамсона). Непосредственным обобщением понятия Σ-допустимого семейства является понятие Σ-регулярного семейства.

Определение 1. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, и пусть $P_1, \ldots, P_n \subseteq A$. Конечное семейство $\{P_1, \ldots, P_n\}$ называется Σ-регулярным, если для любой $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$-позитивной Σ-формулы $\Phi(\overline{x})$ сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}} \cup \{\overline{\mathrm{P}}\}$ и любого набора $\overline{a}$ из A верно следующее: если $\langle \mathbb{A}, P_1, \ldots, P_n \rangle \models \Phi(\overline{a})$, то существуют $\pi_1, \ldots, \pi_n \in A$ такие, что $\pi_1 \subseteq P_1, \ldots, \pi_n \subseteq P_n$ и $\mathbb{A} \models \Phi^{P_1, \ldots, P_n}_{\pi_1, \ldots, \pi_n}(\overline{a})$ (последняя запись означает, что в формуле Φ все вхождения атомарных подформул вида $\mathrm{P}_i(t)$ заменяются на подформулы $t \in \pi_i$).

Если одноэлементное семейство $\{P\}$ Σ-регулярно, то P называется Σ_*-множеством. Класс $\Sigma_*(\mathbb{A})$ всех Σ_*-множеств в $\mathbb{A}$ является естественным расширением класса $\Sigma(\mathbb{A})$ всех Σ-подмножеств. Выделим еще один важный частный случай этого понятия.

Определение 2. Подмножество $P \subseteq A$ называется Δ_*-множеством, если $\{P, A \setminus P\}$ — Σ-регулярная пара в $\mathbb{A}$.

В случае, когда $\mathbb{A}$ имеет вид $HF(\mathfrak{M})$, любое подмножество $P \subseteq A$ будет Σ_*-множеством в $\mathbb{A}$, поэтому всякое Σ-подмножество будет Δ_*-множеством. Таким образом, для этого случая справедливо соотношение $\Sigma(\mathbb{A}) \subseteq \Delta_*(\mathbb{A})$. Следующая теорема дает пример допустимого множества, для которого это не так.

Теорема 1. *Для* $\mathbb{A} = HYP(\mathbb{N})$ *справедливо* $\Sigma(\mathbb{A}) \cap \Delta_*(\mathbb{A}) = \Delta(\mathbb{A})$.

Если через $\Sigma(\mathfrak{M}), \Delta(\mathfrak{M})$ и $\Delta_*(\mathfrak{M})$ обозначить классы отношений на $\mathfrak{M}$, являющихся соответственно Σ-,Δ- и Δ_*-множествами в допустимом множестве $HYP(\mathfrak{M})$, то из принципа Δ-выделения непосредственно следует, что $\Sigma(\mathfrak{M}) \cap \Delta_*(\mathfrak{M}) = \Delta(\mathfrak{M})$. Поэтому, в общем случае, в $HYP(\mathfrak{M})$ далеко не всякое Σ-отношение на $\mathfrak{M}$ будет Δ_*-множеством. Однако существует класс моделей, для которых $HYP(\mathfrak{M})$ устроен так же "просто", как и $HF(\mathfrak{M})$.

Лемма 1. *Если* $\mathrm{Th}\,\mathfrak{M})$ ω*-категорична, то* $\Sigma(\mathfrak{M}) = \Delta(\mathfrak{M})$.

Теорема 2. *Если* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ ω*-категорична, то для допустимого множества* $\mathbb{A} = HYP(\mathfrak{M})$ *имеет место соотношение* $\Sigma(\mathbb{A}) \subseteq \Delta_*(\mathbb{A})$.

Литература

[1] Ю. Л. Ершов, *Определимость и вычислимость*, Научная книга, Новосибирск, 1996.
[2] G. E. Sacks, *Higher Recursion Theory*, Springer, Berlin, 1990.
[3] J. Barwise, *Admissible Sets and Structures*, Springer, Berlin, 1975.
[4] А. И. Стукачев, Σ-допустимые семейства над линейными порядками, *Алгебра и логика*, в печати.

Новосибирский госуниверситет
email:

Новосибирский государственный университет
E-mail address: aistu@math.nsc.ru