Мальцевские чтения
Новосибирск (2002)
Тезисы докладов

Автоустойчивые I-алгебры

П. Е. Алаев

Будем называть I-алгеброй булеву алгебру с конечным числом выделенных идеалов, т. е. модель вида $(A, I_1, \ldots, I_\lambda)$, где A — булева алгебра, рассматриваемая в языке $\{+, \cdot, 0, 1, C\}$, а $I_1, \ldots, I_\lambda$ — идеалы в A, выделяемые соответствующими предикатами. На идеалах в A можно ввести операции $+$, $\cap$ и $\to$, где $L \to M = \{x \mid \forall y \leqslant x\, (y \in L \to y \in M)\}$. Через I_n^+ обозначим идеал $\sum_{I_m \subset I_n} I_m$. Назовем I-алгебру $(A, I_1, \ldots, I_\lambda)$ устойчивой, если

(1) множество всех идеалов вида $I_{i_1} + \ldots + I_{i_k}$, $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [1, \lambda]$, замкнуто относительно $\to$;

(2) A/I_n содержит конечное число атомов для любого $n \in [1, \lambda]$;

(3) для каждого $n \in [1, \lambda]$ верно хотя бы одно из двух утверждений: либо $I_n^+ = I_k$ при некотором $k \in [1, \lambda]$, либо $I_n = A$ и A/I_n^+ — двухэлементная алгебра.

Теорема. *Пусть $(A, I_1, \ldots, I_\lambda)$ — вычислимая I-алгебра, а множество идеалов $\{I_1, \ldots, I_\lambda\}$ замкнуто относительно $\cap$ и содержит $\{0\}$ и A. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *$(A, I_1, \ldots, I_\lambda)$ автоустойчива*;

(2) *$(A, I_1, \ldots, I_\lambda)$ — прямое произведение конечного числа устойчивых I-алгебр.*

Заметим, что эта теорема позволяет описать произвольные автоустойчивые I-алгебры, поскольку в сигнатуру всегда можно добавить новые идеалы для $\{0\}$, A и всех пересечений вида $I_{i_1} \cap \ldots \cap I_{i_k}$, и это не повлияет на автоустойчивость.

Следствие. *Если фиксировано число выделенных идеалов λ, то существует такой конечный набор I-алгебр вида $(A, I_1, \ldots, I_\lambda)$, что класс автоустойчивых I-алгебр совпадает с семейством всех конечных прямых произведений I-алгебр из этого набора.*

В ходе решения этой задачи доказано также некоторое обобщение теоремы С. С. Гончарова о ветвлении, в котором удалось отказаться от условия конечности.

Институт математики СО РАН
E-mail: alaev@math.nsc.ru