Мальцевские чтения
Новосибирск (2004)
тезисы докладов

Эквивариантные автоморфизмы аффинных вложений однородных пространств алгебраических групп

И. В. Аржанцев[1], *Д. А. Тимашёв*[2]

Пусть G — редуктивная алгебраическая группа G над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики ноль, и H — замкнутая подгруппа группы G. По теореме Шевалле, множество левых смежных классов G/H несет каноническую структуру квазипроективного алгебраического многообразия с транзитивным действием группы G левыми сдвигами. Это многообразие называют *однородным пространством* группы G.

Если G — абстрактная группа и H — подгруппа в G, то группа биекций множества G/H, коммутирующих с G-действием, совпадает с группой $W(H) = N_G(H)/H$, где $N_G(H)$ — нормализатор H в группе G. Для алгебраических групп такие биекции определяют автоморфизмы многообразия G/H, и группа эквивариантных автоморфизмов пространства G/H совпадает с $W(H)$.

Напомним, что *вложением* однородного пространства G/H называют пару (X, x), где X — алгебраическое G-многообразие, а $x \in X$ — точка со стабизизатором H, орбита которой плотна (и открыта) в X. Каждый эквивариантный автоморфизм многообразия X определяет эквивариантный автоморфизм открытой орбиты, изоморфной G/H, и потому $\mathrm{Aut}_G(X)$ есть подгруппа группы $W(H)$. Вложение (X, x) пространства G/H называют *аффинным*, если X является аффинным многообразием. Пространство G/H допускает аффинное вложение тогда и только тогда, когда оно квазиаффинно. В этой ситуации подгруппа H называется *обозримой* в G. Согласно критерия Мацусимы, G/H аффинно тогда и только тогда, когда H редуктивна. В частности, каждая редуктивная подгруппа обозрима.

В докладе будет рассказано о результатах, связанных с группами эквивариантных автоморфизмов $\mathrm{Aut}_G(X)$ аффинных вложений однородных пространств. Напомним несколько известных ранее фактов. В случае, когда $G = SL(2)$, $H = \{e\}$, многообразие X нормально и действие $G : X$ не является транзитивным, группа $\mathrm{Aut}_G(X)$ есть подгруппа Бореля в $W(H) = SL(2)$. Этот результат был получен в рамках теории $SL(2)$-вложений [1].

[1]Работа поддержана грантом Президента РФ МК-1279.2004.1 и CRDF grant RM1-2543-MO-03

[2]Работа поддержана грантом CRDF grant RM1-2543-MO-03

Для сферического однородного пространства G/H группа $\mathrm{Aut}_G(X)$ совпадает с $W(H)$ для любого аффинного вложения, см. например [3].

Мы доказываем, что для произвольного аффинного вложения с конечным числом G-орбит и G-неподвижной точкой связная компонента единицы группы $Aut_G(X)$ разрешима. Доказательство использует критерий Гильберта-Мамфорда, а также результаты работы [5], и проходит над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики.

Полученный результат может быть использован в теории алгебраических моноидов. А именно, пусть M — алгебраическая полугруппа с нулем, группа обратимых элементов $G(M)$ которой редуктивна. Тогда число левых (или правых) смежных классов $G(M)$ в M конечно тогда и только тогда, когда M коммутативна.

Другое приложение касается канонических вложений. Если однородное пространство G/H квазиаффинно и алгебра $\Bbbk[G/H]$ конечно порождена, то *каноническим вложением* $\mathrm{CE}(G/H)$ пространства G/H называется спектр алгебры $\Bbbk[G/H]$. В случае, когда $H = P\mathrm{u}$ есть унипотентный радикал параболической подгруппы P в простой группе G, мы доказываем, что число G-орбит в $\mathrm{CE}(G/P\mathrm{u})$ конечно тогда и только тогда, когда либо $H = \{e\}$, либо H есть максимальная унипотентная подгруппа в G. Вычислено значение модальности для $\mathrm{CE}(G/P\mathrm{u})$.

Развернутое изложение перечисленных результатов, а также детальное исследование канонического вложения $\mathrm{CE}(G/P\mathrm{u})$, содержатся в статье [4].

Литература

[1] В. Л. Попов, *Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы $SL(2)$*, Изв. АН СССР, Сер. Мат. **37:4** (1973), 792–832.

[2] I. V. Arzhantsev, *Algebras with finitely generated invariant subalgebras*, Ann. Inst. Fourier **53:2** (2003), 379–398.

[3] I. V. Arzhantsev and D. A. Timashev, *Affine embeddings with a finite number of orbits*, Transformation Groups **6:2** (2001), 101–110.

[4] I. V. Arzhantsev and D. A. Timashev, *On the canonical embeddings of certain homogeneous spaces*, `arXiv:math.AG/0308201`, to appear in AMS Translations.

[5] F. D. Grosshans, *The Invariants of Unipotent Radicals of Parabolic Subgroups*, Invent. Math. **73** (1983), 1–9.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова,
e-mail: *arjantse@mccme.ru*

1 октября 2004