Мальцевские чтения
Новосибирск (2004)
тезисы докладов

Группы автоморфизмов однородных булевых пространств

П. А. Бирюков

Множество X, в котором заданы алгебра подмножеств $\mathbf{A}$ и ее собственный идеал $\mathbf{I}$, называется булевым пространством. Его автоморфизмы — это перестановки множества X, сохраняющие алгебру и идеал. Множество $A \in \mathbf{A}$ называется половинкой, если $A, X - A \notin \mathbf{I}$. Булево пространство однородно, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на половинках. Разбиение пространства назовем правильным, если все его элементы являются половинками.

Теорема 1. Пусть G — группа автоморфизмов однородного булева пространства и $\mathbf{P}$ — конечное правильное разбиение. Множество всех автоморфизмов, относительно которых разбиение $\mathbf{P}$ инвариантно по модулю идеала $\mathbf{I}$, является максимальной собственной подгруппой в G.

Однородное булево пространство называется σ-однородным, если выполняются следующие условия:
(1) Существует бесконечное счетное правильное разбиение.
(2) Для любых двух правильных разбиений $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ и для любого семейства автоморфизмов $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ таких, что $g_n(A_n) = B_n$, существует такой автоморфизм g, что $g(x) = g_n(x)$ для всех $x \in A_n$.

Пусть G — группа автоморфизмов булева пространства и $K(G)$ — ядро ее канонического гомоморфизма в группу автоморфизмов факторалгебры $\mathbf{A}/\mathbf{I}$. Булево пространство называется нормальным, если носители всех автоморфизмов из $K(G)$ принадлежат идеалу $\mathbf{I}$.

Теорема 2. Пусть G — группа автоморфизмов σ-однородного булева пространства. Тогда
(1) $K(G)$ — наибольшая собственная нормальная подгруппа в G, и для любых $f \in G$ и $g \in G - K(G)$ автоморфизм f является произведением шести автоморфизмов, каждый из которых сопряжен с g или с g^{-1};
(2) каждый элемент группы G является произведением двух коммутаторов;
(3) группа G не является объединением возрастающей последовательности собственных подгрупп.

Теорема 3. Пусть G — группа автоморфизмов нормального σ-однородного булева пространства. Тогда
(1) нормальные подгруппы группы G образуют вполне упорядоченную цепь;
(2) для любых $f \in G$ и $g \in G - K(G)$ автоморфизм f является произведением четырех автоморфизмов, каждый из которых сопряжен с g или с g^{-1};
(3) любая счетная подгруппа группы G содержится в некоторой конечно порожденной подгруппе.

Таким образом, на группы автоморфизмов σ-однородных булевых пространств распространяются многие из основных известных фактов о строении бесконечных симметрических групп. Заметим, что для любого бесконечного кардинала ν симметрическая группа степени ν является группой автоморфизмов нормального σ-однородного булева пространства $(X, P(X), [X]^{<\nu})$, где $|X| = \nu$, $P(X)$ — алгебра всех подмножеств множества X и $[X]^{<\nu}$ — идеал всех подмножеств мощности $< \nu$.

Булево пространство $(X, \mathbf{A}, \mathbf{I})$ называется борелевским, если $\mathbf{A}$ — σ-алгебра и $\mathbf{I}$ — σ-идеал. Любое однородное борелевское пространство σ-однородно, и если в $\mathbf{A}$ есть счетное подсемейство, разделяющее точки, то оно нормально. Приведем примеры таких пространств. Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство без изолированных точек.
1. Абсолютное борелевское пространство: $\mathbf{A} = B(X)$ — σ-алгебра борелевских множеств пространства X, $\mathbf{I}$ — σ-идеал счетных множеств.
2. Пространство Лебега: $\mathbf{A} = B(\mu)$ — пополнение σ-алгебры $B(X)$ относительно некоторой регулярной σ-конечной борелевской меры μ, $\mathbf{I}$ — σ-идеал множеств меры 0.
3. Пространство Бэра: $\mathbf{A}$ — σ-алгебра множеств со свойством Бэра в X, $\mathbf{I}$ — σ-идеал множеств первой категории.
Группы автоморфизмов этих борелевских пространств представляют интерес для эргодической теории и дескриптивной теории множеств.

Другой класс примеров образуют алгебры открыто-замкнутых множеств в сильно однородных сепарабельных метрических пространствах (идеал в этом случае тривиален, а группа автоморфизмов совпадает с группой гомеоморфизмов). Нульмерное топологическое пространство называется сильно однородным, если в нем все непустые открыто-замкнутые множества гомеоморфны. Для любого некомпактного сильно однородного сепарабельного метрического пространства соответствующее булево пространство σ-однородно. Примерами являются пространства рациональных и иррациональных чисел.

Кемеровский Государственный Университет,
e-mail: *biryukov@kemsu.ru*

9 ноября 2004