Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Об отсутствии автоматной структуры у конечно порожденных полугрупп регулярных языков

С. А. Афонин, Е. Е. Хазова, и А. С. Шундеев

Пусть S — полугруппа, L — регулярный язык в алфавите A, а $\psi : A^+ \to S$ — гомоморфизм, удовлетворяющий условию $L\psi = S$. Пара $(A\psi, L)$ называется *автоматной структурой* для S, если выполнены следующие условия:

- множество $L_= = \{(u, v) \mid u, v \in L, u\psi = v\psi\}$ — регулярно;
- $L_a = \{(u, v) \mid u, v \in L, (ua)\psi = v\psi\}$ регулярно для всех $a \in A$.

Полугруппа S называется *автоматной*, если для нее существует автоматная структура $(A\psi, L)$. Автоматные полугруппы имеют целый ряд интересных свойств [**3**], в частности, все классы эквивалентности элементов A^+ являются регулярными множествами.

Пусть задан конечный алфавит Δ и некоторая подстановка регулярных языков $\varphi : \Delta \to \mathrm{Reg}(\Sigma)$, сопоставляющая буквам алфавита Δ регулярные языки над некоторым алфавитом Σ. Подстановка φ может быть естественным образом расширена до гомоморфизма между Δ^+ и конечно порожденной полугруппой регулярных языков $\mathcal{S}_\varphi = \langle \Delta\varphi \rangle$ относительно конкатенации языков, для обозначения которого мы будем использовать тот же символ φ. Множество $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Reg}(\Sigma)$ регулярных языков называется *рациональным* [**1**], если найдется регулярный язык $K \subseteq \Delta^+$ и подстановка φ такие, что $\mathcal{R} = \{w\varphi \mid w \in K\}$. В этом случае будем писать $\mathcal{R} = (K, \varphi)$.

Основываясь на результатах работ [**4, 1**], в которых доказывается алгоритмическая разрешимость задачи принадлежности для полугрупп и рациональных множеств регулярных языков, соответственно, в [**2**] было доказано, что для произвольной подстановки φ регулярных языков и произвольного слова $w \in \Delta^+$ множество $[w] = \{v \in \Delta^+ \mid v\varphi = w\varphi\}$ регулярно в алфавите Δ. Это утверждение позволяет предположить, что полугруппы регулярных языков являются автоматными. В данной работе доказывается, что в общем случае это предположение неверно.

Теорема. *Существует конечно порожденная полугруппа регулярных языков, не имеющая автоматной структуры.*

Работа выполнена при частичной поддержке проекта № 10002-251 программы Президиума РАН "Параллельные вычисления на многопроцессорных вычислительных комплексах".

Доказательство основано на следующем наблюдении. Предположим, что полугруппа $\mathcal{S}_\varphi$ автоматна. Тогда множество $L_=$ всех пар равных слов регулярно в $\Delta^+ \times \Delta^+$, а для любого регулярного языка $K \in \mathrm{Reg}(\Delta)$ его *замыкание* $\overline{K} = K\varphi\varphi^{-1} = \{u \in \Delta^+ \mid \exists v \in K : u\varphi = v\varphi\}$ также является регулярным. Из регулярности замыкания следует алгоритмическая разрешимость задачи проверки эквивалентности двух рациональных множеств регулярных языков $\mathcal{R}_1 = (K_1, \varphi)$ и $\mathcal{R}_2 = (K_2, \varphi)$, так как для этого достаточно проверить равенство $\overline{K_1} = \overline{K_2}$. Заметим, что совпадение подстановки φ в определении множеств $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ не является существенным ограничением. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать, что задача определения эквивалентности рациональных множеств регулярных языков алгоритмически неразрешима, что делается сведением к задаче проверки равенства двух подстановок на заданном языке. В **[5]** было доказано, что для двух конечных подстановок φ_1, φ_2 задача проверки выполнения равенства $\varphi_1(u) = \varphi_2(u)$ на всех слова u языка $L = ab^*c$ алгоритмически неразрешима.

Список литературы

[1] Afonin, S., and Hazova, E. Membership and finiteness problems for rational sets of regular languages. In *Proceedings of the Developments in Language Theory 2005* (2005), C. De Felice and A. Restivo, Eds., vol. 3572 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 88–99.

[2] Afonin, S., and Hazova, E. The word problem of the finitely generated semigroup of regular languages. Тезисы докладов международной конференции «Semigroups and Languages», 2005.

[3] Campbell, C. M., Robertson, E. F., Ruškuc, N., and Thomas, R. M. Automatic semigroups. *Theoretical Computer Science 250*, 1–2 (Jan. 2001), 365–391.

[4] Hashiguchi, K. Representation theorems on regular languages. *Journal of computer and system sciences 27* (1983), 101–115.

[5] Karhumäki, J., and Lisovik, L. P. The equivalence problem of finite substitutions on ab*c, with applicat ions. In *ICALP '02: Proceedings of the 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming* (London, UK, 2002), Springer-Verlag, pp. 812–820.

НИИ Механики МГУ им. М. В. Ломоносова, МСЦ РАН
E-mail: serg@msu.ru

НИИ Механики МГУ им. М. В. Ломоносова

МСЦ РАН