Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Счетно категоричные и автоустойчивые I-алгебры

П. Е. Алаев

Пусть $A = (A', I_1, \dots, I_\lambda)$ — счетная булева алгебра с конечным числом выделенных идеалов (счетная I-алгебра). A *псевдо-неразложима*, если из $A \cong A_1 \times A_2$ следует $A \cong A_1$ или $A \cong A_2$.

Введем на множестве всех идеалов в A три операции:

$I_1 + I_2 = \{x + y \mid x \in I_1, y \in I_2\}$,

$I_1 \cdot I_2 = I_1 \cap I_2$,

$I_1 \to I_2 = \{x \in A \mid \forall y \leqslant x(y \in I_1 \to y \in I_2)\}$.

Через $H(A)$ обозначим замыкание набора идеалов $I_1, \dots, I_\lambda, \{0\}, A$ относительно операций $\{+, \cdot, \to\}$; $H(A)$ с этими операциями, $0 = \{0\}$ и $1 = A$ образует гейтингову алгебру. Пусть $\bar{H}(A)$ обозначает $(H(A), I_1, \dots, I_\lambda)$, т. е. гейтингову алгебру с λ выделенными порождающими элементами.

Будем говорить, что A *ω-категорична*, если такова ее элементарная теория.

Теорема 1. *Ненулевая I-алгебра A ω-категорична и псевдо-неразложима тогда и только тогда, когда $\bar{H}(A)$ конечна, в $\bar{H}(A) \setminus \{1\}$ есть наибольший элемент L_0 и выполняется одно из двух условий*:

(1) *A/L безатомна для всех $L \in \bar{H}(A)$,*

(2) *A/L_0 двухэлементна и A/L безатомна для всех $L \in \bar{H}(A) \setminus \{L_0\}$.*

Для такой A определим инвариант $\varepsilon_A \in \{0, 1\}$ так: *$\varepsilon_A = 0 \Leftrightarrow$ верен пункт* (1).

Следующая теорема говорит, что пары вида $(\bar{H}(A), \varepsilon_A)$ с указанными выше свойствами полностью описывают все типы изоморфизма ω-категоричных псевдо-неразложимых I-алгебр.

Теорема 2. *Пусть $\bar{H}$ — ненулевая конечная гейтингова алгебра с λ выделенными порождающими, в $\bar{H} \setminus \{1\}$ есть наибольший элемент и $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Тогда существует счетная ω-категоричная псевдо-неразложимая I-алгебра $A = (A', I_1, \dots, I_\lambda)$, единственная с точностью до изоморфизма, для которой $\bar{H}(A) \cong \bar{H}$ и $\varepsilon_A = \varepsilon$.*

Следствие 1 (описание ω-категоричных I-алгебр). (1) *Счетная I-алгебра A ω-категорична $\Leftrightarrow$ $A \cong A_1 \times \ldots \times A_n$, где A_i — ω-категоричные псевдо-неразложимые I-алгебры.*

(2) *если это разложение минимально, т. е. n — наименьшее из возможных, то типы изоморфизма алгебр $A_1, \dots, A_n$ определены однозначно.*

Теорема 3. *Пусть A — счетная ω-категоричная I-алгебра.*

(1) *Разложение $A \cong A_1 \times \ldots \times A_n$ минимально тогда и только тогда, когда не существует пары индексов $i \neq j$, для которых $A_i \times A_j \cong A_i$.*

(2) *Если A_1, A_2 — алгебры с типами $(\bar{H}_1, \varepsilon_1)$ и $(\bar{H}_2, \varepsilon_2)$, то $A_1 \times A_2 \cong A_1$ тогда и только тогда, когда ($\bar{H}_1 \cong \bar{H}_2$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) или ($\bar{H}_2 \cong \hat{x}$ для некоторого $x \in \bar{H}_1 \setminus \{1\}$ и $\varepsilon_2 = 0$).*

Следствие 2. *Пусть A, B — две счетные ω-категоричные I-алгебры. Тогда $A \cong B \Leftrightarrow \bar{H}(A) \cong \bar{H}(B)$ и если $\alpha : \bar{H}(A) \to \bar{H}(B)$ — изоморфизм, то мощность и число атомов в A/L и в $B/\alpha(L)$ равны для всех $L \in \bar{H}(A)$.*

Если H — гейтингова алгебра и $y \in H$, то через y^- обозначим $\sum_{y_1 < y} y_1$.

Следствие 3. *I-алгебра A автоустойчива $\Leftrightarrow A$ — конечная прямая сумма автоустойчивых ω-категоричных псевдо-неразложимых I-алгебр.*

Следствие 4. *Пусть A — ω-категоричная псевдо-неразложимая I-алгебра с типом $(\bar{H}, \varepsilon)$. Она автоустойчива тогда и только тогда, когда*

(1) *$\bar{H}$ порождается 0, 1 и выделенными элементами только с помощью $+, \cdot$,*

(2) *если $y \in \bar{H}$ неразложим и $y, y^- \neq 0$, то либо ($y = 1$ и $\varepsilon = 1$), либо y^- — произведение некоторого числа выделенных элементов.*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: alaev@math.nsc.ru