Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Относительная перечислимость в иерархии Ершова

И. И. Батыршин

В 1968–1970 годах Ю. Л. Ершовым была введена и изучена одна иерархия подмножеств натурального ряда ω, являющаяся некоторым обобщением иерархии n-в.п. множеств в случае $n < \omega$ [**1, 2, 3**].

В 1997 году Арслановым, ЛаФортом и Сламаном была установлена интересная связь понятий ω-вычислимой перечислимости и относительной перечислимости, а именно была доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть B — ω-в.п. множество, C — в.п. относительно некоторого $A <_T C$ и $B \leqslant_T C$. Тогда существует такое d-в.п. множество D, что $B \leqslant_T D \leqslant_T C$.*

Следствие 1. *Любая $2-CEA$, ω-в.п. степень является d-в.п. степенью.*

В данной работе приводятся результаты, касающиеся обобщений этой теоремы на другие уровни иерархии Ершова. В теореме 2 доказывается обобщение теоремы 3 на классы множеств Δ_{v_n}, где v_n, $n > 1$, — произвольные обозначения для ω^n соответственно.

Теорема 2. *Для любого $n > 1$ если $|v|_\mathcal{O} = \omega^{n+1}$, $B \in \Delta_v^{-1}$, A — в.п. множество, $B \leqslant_T A \oplus W^A$, то существует такое множество $D \in \Sigma_c^{-1}$, где $c <_\mathcal{O} v$ и $|c|_\mathcal{O} = \omega^n$, что $B \leqslant_T D \leqslant_T A \oplus W^A$.*

Следствие 2. *Любая $2-CEA$, Δ_v^{-1}-степень является Σ_c^{-1}-степенью, где $|v|_\mathcal{O} = \omega^{n+1}$, $c <_\mathcal{O} v$ и $|c|_\mathcal{O} = \omega^n$, $n > 1$.*

Следующие теоремы показывают неулучшаемость полученного результата.

Теорема 3. *Для любого $n > 0$ если $|a|_\mathcal{O} = \omega^n$, то существует собственно Σ_a^{-1}-множество B, вычислимо перечислимое относительно некоторого в.п. множества $A <_T B$.*

Следствие 3. *Для любого $n > 0$ если $|a|_\mathcal{O} = \omega^{n+1}$, то существует множество $B \in \Delta_a^{-1}$, вычислимо перечислимое относительно некоторого в.п. множества $A <_T B$, такое, что $B \not\equiv_T C$ для любых $c <_\mathcal{O} b$ и $C \in \Sigma_c^{-1}$, где $b <_\mathcal{O} a$ и $|b|_\mathcal{O} = \omega^n$.*

Работа поддержана грантом РФФИ № 05-01-00605.

Теорема 4. *Пусть* $|v|_{\mathcal{O}} = \omega^\omega$. *Тогда существует множество* $B \in \Delta_v^{-1}$, *вычислимо перечислимое относительно некоторого в.п. множества* $A <_T B$, *такое, что* $B \not\equiv_T C$ *для всех* $b <_{\mathcal{O}} v$ *и* $C \in \Sigma_b^{-1}$.

Список литературы

[1] Ершов Ю. Л. Об одной иерархии множеств, I // Алгебра и Логика. 1968. Т.7. N.1. С. 47–75.
[2] Ершов Ю. Л. Об одной иерархии множеств, II // Алгебра и Логика. 1968. Т.7. N.4. С. 15–48.
[3] Ершов Ю. Л. Об одной иерархии множеств, III // Алгебра и Логика. 1970. Т.9. N.1. С. 34–52.
[4] Arslanov M. M., LaForte, G. L., Slaman, T. A. Relative enumerability in the difference hierarchy // J. Symb. Logic. 1998. V. 63. P. 411–420.
[5] Arslanov M. M. Degree structures in the Local degree theory //Lecture Notes in pure and applied mathematics. 1997. vol. 187. P. 49–74
[6] Селиванов В. Л. Об иерархии Ершова // Сиб. мат. журнал. 1985. Т. XXVI. N.1. С. 134–150.

E-mail: `ilnurb@yandex.ru`