Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Проблема Мальцева элементарной эквивалентности производных алгебраических структур

Е. И. Бунина и А. В. Михалев

Первые результаты о связи элементарных свойств некоторых моделей с элементарными свойствами производных моделей были получены А. И. Мальцевым в 1961 году в работе [**9**]. Он доказал, что группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ (где $G = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{PSL}$, $n, m \geqslant 3$, K, L — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны.

Изучение этих вопросов было продолжено в 1992 году, когда с помощью конструкции ультрастепени и теоремы об изоморфизме [**8**] К. И. Бейдар и А. В. Михалев [**1**] сформулировали общий подход к проблемам элементарной эквивалентности различных алгебраических структур, и обобщили теорему Мальцева на случай, когда K и L — тела и ассоциативные кольца.

В 1998–2005 Е. И. Бунина продолжила изучать некоторые проблемы этого типа (см. [**2, 3, 4, 5**]). Она обобщила результаты А. И. Мальцева для унитарных линейных групп над телами и ассоциативными кольцами с инволюциями, а также для групп Шевалле над полями и локальными коммутативными кольцами.

В 2000 году В. Толстых в [**10**] изучил связь между свойствами второго порядка тел и свойствами первого порядка групп автоморфизмов бесконечномерных линейных пространств над ними.

В 2003 году (см. [**6**]) авторы изучали связь между свойствами второго порядка ассоциативных колец и элементарными свойствами категорий модулей, колец эндоморфизмов, групп автоморфизмов и проективных пространств бесконечного ранга над этими кольцами.

В 2004 году авторами (см. [**8**]) была установлена связь между элементарной эквивалентностью колец эндоморфизмов абелевых p-групп и эквивалентностью в логике второго порядка этих групп.

Новыми результатами авторов в этом направлении являются результаты, касающиеся элементарной эквивалентности категорий полигонов над моноидами.

Мы рассматриваем структуру $\langle Cn, Mon\rangle$, состоящую из класса Cn всех кардинальных чисел и моноида Mon с обычной операцией умножения, и доказываем следующую теорему:

Теорема. *Предположим, что моноид S_1 удовлетворяет следующему условию: существует предложение Select языка второго порядка структуры $\langle Cn, Mon\rangle$, истинное для моноида S, подобного S_1, тогда и только тогда, когда*

$$\langle Cn, S_1\rangle \equiv_2 \langle Cn, S_2\rangle.$$

Тогда для любого моноида S_1 условие

$$Act - S_1 \equiv Act - S_2$$

равносильно

$$\langle Cn, S_1\rangle \equiv_2 \langle Cn, S'\rangle$$

для некоторого моноида S', подобного S_2.

Список литературы

[1] C. I. Beidar and A. V. Mikhalev, “On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups,” *Contemp. Math.*, **131**, 29–35 (1992).
[2] Е. И. Бунина, “Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над полями,” *Фунд. Прикл. Мат.*, **4**, No. 4, 1265–1278 (1998).
[3] Е. И. Бунина, “Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами,” *Успехи Мат. Наук*, **53**, No. 2, 137–138 (1998).
[4] Е. И. Бунина, “Элементарная эквивалентность групп Шевалле,” *Успехи Мат. наук*, **56**, No. 1, 157–158 (2001).
[5] Е. И. Бунина, “Группы Шевалле над полями и их элементарные свойства,” *Успехи Мат. наук*, **59**, No. 5, 952–953 (2004).
[6] Е.И. Бунина, А.В. Михалев, “Элементарная эквивалентность категорий модулей над кольцами, колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей,” *Фунд. Прикл. Мат.*, **10**, No. 2, 51–134 (2004).
[7] Е.И. Бунина, А.В. Михалев, “Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых p-групп,” *Фунд. Прикл. Мат.*, **10**, No. 2, 135–224 (2004).
[8] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model Theory*, North– Holland, Amsterdam–London, American Elsevier, New York (1973).
[9] А.И. Мальцев “Об элементарных свойствах линенйых групп,” в: *Проблемы математики и механики*, Новосибирск (1961), 110–132.
[10] V. Tolstykh, “Elementary equivalence of infinite– dimensional classical groups,” *Ann. Pure Appl. Logic*, **105**, 103–156 (2000).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: helenbunina@yandex.ru