Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Псевдомногообразия конечных полугрупп, обладающих полным радикалом

Т. Ю. Финк

В теории абелевых групп важную роль играют понятия полноты (делимости) и редуцированности. Эти понятия можно интерпретировать, используя терминологию теории многообразий групп, что позволяет определить их аналоги для произвольных алгебр [**1, 2**], в том числе и для полугрупп. В работе [**2**] сформулирована основная проблематика, касающаяся указанных понятий. В русле этой проблематики упомянутые понятия изучаются нами для конечных полугрупп [**3, 4, 5, 6**].

В любой алгебре произвольного многообразия алгебр существует наибольшая полная россыпь [**7**], которая в общем случае не является конгруэнц-допустимой. Если же она конгруэнц-допустима, то факторалгебра по наименьшей такой конгруэнции редуцирована [**7**]. Таким образом, эта алгебра является расширением ее наибольшей полной россыпи при помощи редуцированной алгебры. Если любая алгебра из многообразия обладает указанным свойством, то в данном многообразии определяется радикал (в смысле Куроша), который следуя [**7**], будем называть полным. В [**7**] доказано, что в любом многообразии алгебр с условием трансвербальности по минимальным подмногообразиям существует полный радикал. Этому условию удовлетворяют многообразия всех групп, всех модулей над любым кольцом, всех ассоциативных колец и другие многообразия. Но многообразие всех полугрупп этим свойством не обладает. Более того, имеются конечные полугруппы, не обладающие полным радикалом. В связи с этим естественной является задача об описании многообразий и псевдомногообразий полугрупп, обладающих полным радикалом. Мы решаем эту задачу для псевдомногообразий конечных полугрупп.

Напомним, что полугруппа называется (атомно) *полной*, если она не имеет гомоморфизмов на нетривиальные полугруппы из атомов решетки всех многообразий полугрупп. Полугруппа называется *редуцированной*, если она не имеет неодноэлементных полных подполугрупп. Произвольное дизъюнктное семейство подполугрупп полугруппы S называется *россыпью* полугруппы S, а полугруппы, которые ее составляют, называются *компонентами россыпи*. Россыпь называется *полной*, если все ее компоненты являются полными полугруппами. Блоки конгруэнции ρ полугруппы S, которые являются ее подполугруппами, образуют россыпь $ker(\rho)$ полугруппы S, которая называется *ядром* ρ. Россыпь $\mathcal{D}$ полугруппы S называется *конгруэнц-допустимой* в S, если $\mathcal{D}=ker(\rho)$ для некоторой конгруэнции ρ на S. *Полным радикалом* полугруппы S называют ее наибольшую полную россыпь $C(S)$, если она конгруэнц-допустима.

Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{V}$ *— псевдомногообразие конечных полугрупп, обладающих полным радикалом,*

(2) $\mathcal{V}$ *— псевдомногообразие конечных полугрупп, являющихся полурешетками архимедовых полугрупп, удовлетворяющих следующему условию: для любого элемента* c *полугруппы* S *из* $\mathcal{V}$ *и любых элементов* a *и* b*, принадлежащих одной и той же полной подгруппе полугруппы* S*, имеют место равенства* $S^1ca = S^1cb$ *и* $acS^1 = bcS^1$*.*

Отметим два следствия доказанной теоремы. Так как в редуцированном псевдомногообразии любая полная группа одноэлементна, получаем

Следствие 1. *В редуцированном псевдомногообразии конечных полугрупп любая полугруппа обладает полным радикалом.*

Впрочем данное следствие вытекает из тривиальности наибольшей россыпи в полугруппах редуцированного псевдомногообразия.

Следствие 2. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{V}$ *— псевдомногообразие конечных комбинаторных полугрупп, обладающих полным радикалом,*

(2) $\mathcal{V}$ *— псевдомногообразие конечных полугрупп, являющихся полурешетками нильрасширений прямоугольных полугрупп,*

(3) $\mathcal{V}$ *— редуцированное псевдомногообразие конечных комбинаторных полугрупп.*

Список литературы

[1] Martynov L. M. *On notions of completeness, solvability, primarity. Reducibility and purity for arbitrary algebras* // International conferenca of Modern Algebra and Applications. – Vanderbilt University. Nashville, Tenesse. – May 14-18, 1996. – Abstracts. P. 79-80.

[2] Мартынов Л. М. *О понятиях полноты, примарности, редуцированности и чистоты для произвольных алгебр.* // Универсальная алгебра и ее приложения: Труды межд. Семинара. Волгоград: Перемена, 2000. – С. 179-190.

[3] Финк Т. Ю. *Конечные полные полугруппы.* // Естественные науки и экология: Ежегодник. Вып. 4: Межвузовский сборник научных трудов. Омск: Издательство ОмГПУ, 1999. – С. 8-14.

[4] Финк Т. Ю. *Вложимость и минимальная полнота конечных полугрупп.* // Математика и информатика: наука и образование. Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник. Вып. 1. Омск: Издательство ОмГПУ, 2001. – С. 20-25.

[5] Финк Т. Ю. *Конечные полугруппы с наибольшими полными подполугруппами.* // Математика и информатика: наука и образование. Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник. Вып. 2. Омск: Издательство ОмГПУ, 2002. – С. 28-34.

[6] Финк Т. Ю. *Расщепляемые псевдомногообразия конечных полугрупп.* // Международная алгебраическая конференция, посвященная столетию со дня рождения П. Г. Конторовича и 70-летию Л. Н. Шеврина. Тезисы докладов. Екатеринбург. Издательство УрГУ, 2005. – С. 16-17.

[7] Мартынов Л. М. *Об одном радикале алгебр со свойством трансвербальности по минимальным многообразиям.* // Вестник ОмГУ, 2004, Вып. 2. – С. 19-21.

Омский государственный педагогический университет

E-mail: `mart@omsk.edu`