Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Об армендеризовских и косых армендеризовских кольцах

А. С. Кузьмина

На протяжении данной работы слово “кольцо” означает ассоциативное кольцо с единицей.

Определение. Кольцо R называется *армендеризовским*, если для любых многочленов $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in R[x]$ из того, что $f(x)g(x) = 0$, следует $a_ib_j = 0$ для всех $0 \leqslant i \leqslant m$ и $0 \leqslant j \leqslant n$.

В 1974 г. Е. Армендериз опубликовал статью [**1**], в которой отмечалось, что если произведение двух многочленов с коэффициентами из редуцированного кольца равно нулю, то и всевозможные попарные произведения коэффициентов этих многочленов равны нулю.

В 1997 году в работе [**2**] кольцам, удовлетворяющим такому условию, дали название “армендеризовских”.

В 2003 году в работе [**6**] было введено понятие косого армендеризовского кольца, которое является обобщением понятия “армендеризовское кольцо”.

Определение. Пусть α — эндоморфизм кольца R. Кольцо R называется *косым армендеризовским с эндоморфизмом* α или α-*косым армендеризовским*, если для любых многочленов $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in R[x;\alpha]$, удовлетворяющих условию $f(x)g(x) = 0$, $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ для всех $0 \leqslant i \leqslant m$ и $0 \leqslant j \leqslant n$.

В настоящей работе сделана попытка изучить армендеризовские и косые армендеризовские групповые кольца. Получены некоторые результаты для групповых колец над полем и групповых колец абелевых групп без кручения. Кроме того, удалось ответить на вопрос, сформулированный в [**6**, с. 115] для жестких колец, и обобщить результат [**6**, предложение 8].

Предложение 1. *Пусть поле F имеет характеристику p, $p > 0$, и порядок конечной группы G не делится на p. Кольцо FG является армендеризовским тогда и только тогда, когда группа G абелева.*

Предложение 2. *Пусть R — кольцо характеристики p. Если групповое кольцо RG является армендеризовским, то либо R — редуцированное кольцо, либо в группе G нет элемента порядка p.*

Пусть α — эндоморфизм кольца R. Продолжим α до эндоморфизма на групповое кольцо RG следующим образом:

$$\alpha(\sum_{g\in G}\beta_g g)=\sum_{g\in G}\alpha(\beta_g)g,\quad \beta_g\in R.$$

Предложение 3. *Пусть α — эндоморфизм кольца R и $\alpha^t=I_R$ для некоторого положительного целого t, где I_R — тождественный эндоморфизм кольца R. Пусть G — абелева группа без кручения. Кольцо R является α-косым армендеризовским в том и только в том случае, если групповое кольцо RG α–косое армендеризовское.*

Предложение 4. *Групповое кольцо $R(C_p\times C_p)$, где C_p — циклическая группа порядка p и R — кольцо характеристики p, не является α-косым армендеризовским для любого эндоморфизма α такого, что $\alpha(1)=1$, где 1 — единица кольца R.*

Определение. Пусть α — эндоморфизм кольца R. Кольцо R называется α-жестким, если для всех $a\in R$ из того, что $a\alpha(a)=0$, следует $a=0$.

Известно, что если кольцо R является α-жестким для некоторого эндоморфизма α кольца R, то выполняются следующие условия:
(1) эндоморфизм α инъективен [**6**, с. 104];
(2) кольцо R редуцированное [**6**, с. 104];
(3) кольцо R является α-косым армендеризовским [**6**, следствие 4].
В работе [**6**] поставлен следующий вопрос: если выполняются перечисленные выше условия, то является ли кольцо R α-жестким? Ответ на этот вопрос дает

Предложение 5. *Пусть α — мономорфизм редуцированного кольца R и кольцо R является α-косым армендеризовским. Тогда R является α-жестким.*

Пусть I — идеал кольца R, α — эндоморфизм кольца R. Если $\alpha(I)\subseteq I$, то эндоморфизм $\bar\alpha: R/I\longrightarrow R/I$ определим следующим образом: $\bar\alpha(a+I)=\alpha(a)+I$.
Следующее предложение является обобщением результата [**6**, предложение 8].

Предложение 6. *Пусть α — мономорфизм кольца R, $\alpha(1)=1$, где 1 — единица кольца R, k — натуральное число. Тогда следующие условия эквивалентны*:
(1) *фактор-кольцо $R[x]/(x^k)$ является $\bar\alpha$-косым армендеризовским,*
(2) *кольцо R α-жесткое.*

В работе [**6**] этот результат доказан для $k=2$.

Список литературы

[1] Armendariz E.P. A note on extensionsof Baer and p.p.-rings // J. Austral. Math. Soc. – 1974. – 18. – pp.470–473.
[2] Rege M.B., Chhawchharia S. Armendariz rings // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 1997. – 73. –pp. 14–17.
[3] Anderson D.D., Camillo V. Armendariz rings and Gaussian rings // Communications in algebra. – 1998. – 26(7). – p. 2265-2272.
[4] Kim N.K., Lee Y. Armendariz rings and Reduced rings // Journal of Algebra. – 2000. – 223. – pp. 477-488.

[5] Lee T.-K., Wong T.-L. On Armendariz rings // Houston Journal of Mathematics. – 2003. – Vol. 29. – 3. – pp. 583–593.

[6] Hong C.Y., Kim N.K., Kwak T.K. On Skew Armendariz rings // Communications in algebra. – 2003. – Vol. 31. – 1. – pp. 103–122.

Барнаульский государственный педагогический университет
E-mail: akuzmina1@yandex.ru