Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

О группах, порожденных тремя инволюциями

А. А. Кузнецов

В настоящей работе доказывается следущая

Теорема. *Пусть* $M = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = e\rangle$ *— группа, порожденная тремя инволюциями* x_1, x_2, x_3 *и*

(α) $\omega(M) \subseteq \omega(L_2(7)) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$,

(β) *произведение любых двух инволюций из* M *есть* 2*-элемент, т. е. если* $|v| = |w| = 2$, *где* $v, w \in M$, *то* $|vw| = \{1, 2, 4\}$.

Тогда $|M| \leq 2^{10}$ *и* $\omega(M) = \{1, 2, 4\}$.

Доказательство теоремы.

Построим группу M при помощи алгоритма из [1]. Пусть $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 2$.

1) Строим объект $K_1 = \{A_1, P_1, T_1, C_1\}$. Здесь:

A_1 — алгоритм поиска и замены соотношений из C_1. Блок апериодичности не рассматривается ($n = \infty$).

$$P_1 = \{e, 0, 1, 2\};$$

где e — пустое слово, $\{0, 1, 2\}$ – образующие объекта. На последовательности P_1 введем отношение порядка $<$ (меньше), полагая по определению $e < 0 < 1 < 2$.

Таблица 1. Таблица умножения T_1.

$T_1 =$

	e	**0**	**1**	**2**
e	e	0	1	2
0	0	e	01	02
1	1	10	e	12
2	2	20	21	e

$C_1 = \{e = 0^2, e = 1^2, e = 2^2\}$ — список соотношений.

2) Далее строим объект K_2:

$$P_2 = \{e, 0, 1, 2, 10, 20, 01, 21, 02, 12\}.$$

Заметим, что в P_2 все слова длины 2 являются произведениями инволюций, поэтому их порядок по определению равен 1, 2 или 4. Вследствие чего список соотношений C_2 пополнится новыми соотношениями: $C_2 = \{e = 0^2, e = 1^2, e = 2^2, e = (10)^4, e = (20)^4, e = (01)^4, e = (21)^4, e = (02)^4, e = (12)^4\}$.

3) Переходим к построению K_3:

$$P_3 = \{e, 0, 1, 2, 10, 20, 01, 21, 02, 12, 010, 210, 020, 120, 101, \\ 201, 021, 121, 102, 202, 012, 212\}.$$

В P_3 среди слов длины 3 выделим "очевидные инволюции" 010, 020, 101, 121, 202 и 212 (действительно $(010)^2 = 01(00)10 = 0(11)0 = 00 = e$ и т. д.). Сгруппируем оставшиеся слова длины 3 по парам: 210 и 012; 120 и 021; 201 и 102. Очевидно, сгруппированные слова являются взаимнообратными друг к другу (действительно $210 \cdot 012 = e$ и $012 \cdot 210 = e$ и т.д.), следовательно $|210| = |012|$, $|120| = |021|$ и $|201| = |102|$. Рассмотрим несколько случаев.

а) Предположим, что $|210| = 3$, тогда список соотношений C_3 пополнится новым соотношением $(210)^3 = e$. Далее, используя компьютерные вычисления, получим, что в объекте K_7

$$P_7 = P_1 = \{e, 0, 1, 2\}.$$

При этом таблица умножения T_7 будет следующая (табл. 2):

Таблица 2. Таблица умножения T_7.

$T_7 =$

	e	**0**	**1**	**2**
e	e	0	1	2
0	0	e	2	1
1	1	2	e	0
2	2	1	0	e

Таким образом, M — элементарная абелева группа порядка 4. Притиворечие с предположением о том, что $|210| = 3$. К аналогичному результату приводят предположения о том, что $|120| = 3$ или $|201| = 3$. Поэтому $|120| \neq 3$ и $|201| \neq 3$.

б) Так как слова 0, 1, 2, 010, 020, 101, 121, 202 и 212 являются инволюциями, то составив из них таблицу умножения, мы получим элементы порядки которых равны 1, 2 или 4. В табл. 3 приведены все различные элеметы из таблицы умножения данных инволюций. Дополним список соотношений C_3 недостающими соотношениями из табл. 3.

Пусть, теперь, $|210| = 7$, тогда в список соотношений C_3 добавится новое соотношение $(210)^7 = e$. Далее, используя компьютерные вычисления, получим, что в объекте K_{11}

$$P_{11} = P_1 = \{e, 0, 1, 2\}.$$

При этом таблица умножения T_{11} будет такая же как и табл. 2.

И, снова, приходим к противоречию с предположением о том, что $|210| = 7$. К аналогичному результату приводят предположения о том, что $|120| = 7$ или $|201| = 7$. Поэтому $|120| \neq 7$ и $|201| \neq 7$.

Совместное рассмотрение случаев (а,б) доказывает, что слова 210, 012, 120, 021, 201 и 102 не могут иметь порядок 3 и 7. Следовательно, данные слова должны иметь порядок 1, 2 или 4. Это дливость следующих соотношений: $(210)^4 = e$, $(012)^4 = e$, $(120)^4 = e$, $(021)^4 = e$, $(201)^4 = e$ и $(102)^4 = e$. Добавим эти соотношения в C_3: $C_3 = \{e = 0^2, e = 1^2, e = 2^2, e = (10)^4, e = (20)^4, e =$

Таблица 3. Элементы, порядок которых равен 1, 2 или 4, как результат умножения двух инволюций.

$(10)^4 = e$	$(1021)^4 = e$	$(021010)^4 = e$
$(20)^4 = e$	$(1201)^4 = e$	$(101020)^4 = e$
$(01)^4 = e$	$(1202)^4 = e$	$(101021)^4 = e$
$(21)^4 = e$	$(1210)^4 = e$	$(101202)^4 = e$
$(02)^4 = e$	$(2010)^4 = e$	$(102121)^4 = e$
$(12)^4 = e$	$(2012)^4 = e$	$(121010)^4 = e$
$(0102)^4 = e$	$(2020)^4 = e$	$(121020)^4 = e$
$(0120)^4 = e$	$(2021)^4 = e$	$(202010)^4 = e$
$(0121)^4 = e$	$(2101)^4 = e$	$(202012)^4 = e$
$(0201)^4 = e$	$(2102)^4 = e$	$(202101)^4 = e$
$(0210)^4 = e$	$(2120)^4 = e$	$(202121)^4 = e$
$(0212)^4 = e$	$(2121)^4 = e$	$(212010)^4 = e$
$(1010)^4 = e$	$(010212)^4 = e$	$(212020)^4 = e$
$(1012)^4 = e$	$(012020)^4 = e$	$(212101)^4 = e$
$(1020)^4 = e$	$(020121)^4 = e$	$(212102)^4 = e$

$(01)^4, e = (21)^4, e = (02)^4, e = (12)^4, e = (210)^4, e = (012)^4, e = (120)^4, e = (021)^4, e = (201)^4, e = (102)^4\}$.

4) Переходим к построению K_4 и последующих объектов K_s, с учетом соотношений из табл. 3. В конечном итоге, получим, что

$$K_{13} = K_{14},$$
$$|P_{13}| = |P_{14}| = 2^{10}.$$

Затем, используя компьютерные вычисления, получим, что таблица умножения T_{14} удовлетворяет всем групповым свойствам. Таким образом, последовательность P_{14} с таблцей умножения T_{14} образует группу, изоморфную M. Непосредственной проверкой находим, что $\omega(M) = \{1, 2, 4\}$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Кузнецов А.А., Шлёпкин А.К., Тарасов С.А.* Об одном алгоритме получения соотношений в свободной бернсайдовской группе $B(m,n)$. //Труды VI Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем", М., МГУ им. М.В. Ломоносова.– 2004.– С. 175–178.

E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru