Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Об обобщенной проблеме Уайтхеда для гиперболических групп

О. В. Богопольский, Е. Вентура и А. Мартино

Пусть G — группа. Скажем, что для G разрешима *проблема Уайтхеда первого рода*, если существует алгоритм, позволяющий дл любых двух конечных наборов элементов $(g_1, \ldots, g_n)$ и $(h_1, \ldots, h_n)$ группы G решить, существует ли автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ такой, что $g_i\alpha = h_i$.

Скажем, что для G разрешима *проблема Уайтхеда второго рода*, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечных наборов элементов $(g_1, \ldots, g_n)$ и $(h_1, \ldots, h_n)$ группы G решить, существует ли автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ такой, что $g_i\alpha$ сопряжено с h_i, $i = 1, \ldots, n$ (сопрягающие могут не совпадать).

Для свободных групп конечного ранга проблемы Уайтхеда первого и второго родов были решены Уайтхедом и Маккулом.

Пусть $U = (u_1, \ldots, u_k)$ — набор элементов G и пусть α — автоморфизм G. Обозначим $U\alpha = (u_1\alpha, \ldots, u_k\alpha)$. Говорим, что наборы V и U сопряжены, если существует внутренний автоморфизм β группы G такой, что $U\beta = V$.

Скажем, что для G разрешима *обобщенная проблема Уайтхеда*, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечных наборов $(U_1, \ldots, U_n)$ и $(V_1, \ldots, V_n)$ упорядоченных конечных подмножеств группы G решить, существует ли автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ такой, что $U_i\alpha$ сопряжено с V_i дл каждого i.

Заметим, что если для G обобщенная проблема Уайтхеда разрешима, то для G проблема Уайтхеда второго (первого) рода тоже разрешима. Мы доказываем обратное утверждение в случае гиперболических групп без кручения.

Теорема 1. *Пусть G — гиперболическая группа без кручения. Если для G разрешима проблема Уайтхеда второго рода, то для G разрешима и обобщенная проблема Уайтхеда, в частности, разрешима проблема Уайтхеда первого рода.*

Следствие 1. *Обобщенная проблема Уайтхеда разрешима для любой свободной группы конечного ранга.*

Теорема 1 доказана с помощью следующей теоремы, представляющей самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть H — δ-гиперболическая группа без кручения, порожденная конечным множеством X. Тогда существует константа $C =$*

$C(\delta, |X|)$ такая, что если φ — эндоморфизм H и $\varphi(h)$ сопряжено с h для каждого элемента h длины не более C, то φ — внутренний автоморфизм.

Из этой теоремы мы выводим

Следствие 2. *Пусть G гиперболическая группа без кручения. Если G финитно аппроксимируема относительно сопряженности, то $\mathrm{Out}(G)$ финитно аппроксимируема.*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: groups@math.nsc.ru