Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Об автоморфизмах свободных метабелевых алгебр ранга 3

Р. Ж. Наурызбаев

Пусть M_n — свободная метабелева алгебра Ли над полем F со свободными порождающими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $AutM_n$ — группа автоморфизмов алгебры M_n. Через $\varphi = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ обозначим автоморфизм φ алгебры M_n такой, что $\varphi(x_i) = f_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Автоморфизмы вида

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \alpha x_i + a, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где $0 \neq \alpha \in F$ и a не зависит от x_i, называются *элементарными*. Подгруппа $TA(M_n)$ группы $AutM_n$ порожденная всеми элементарными автоморфизмами называется *подгруппой ручных автоморфизмов*.

Назовем автоморфизмы вида

$$\sigma(i, \alpha, f) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \alpha x_i + f, x_{i+1}, \ldots, x_n), \tag{1}$$

где $0 \neq \alpha \in F$, $f \in M_n$ и $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, *почти элементарными*. Подгруппа $AT(M_n)$ группы $AutM_n$ порожденная всеми почти элементарными автоморфизмами назовем *подгруппой почти ручных автоморфизмов*.

Пусть φ, τ — произвольные автоморфизмы алгебры M_3. Допустим, что $\varphi\delta = \tau$ для некоторого автоморфизма δ. Если δ — элементарный автоморфизм, то будем писать $\varphi \to \tau$, если δ — почти элементарный автоморфизм, то будем писать $\varphi \mapsto \tau$. Для любого автоморфизма $\theta = (f_1, f_2, f_3)$ положим $\deg\theta = \deg f_1 + \deg f_2 + \deg f_3$. Автоморфизм θ называется *элементарно сократимым*, если найдется автоморфизм τ такой, что $\theta \to \tau$ и $\deg\tau < \deg\theta$. Аналогично, автоморфизм θ назовем *почти элементарно сократимым*, если найдется автоморфизм τ такой, что $\theta \mapsto \tau$ и $\deg\tau < \deg\theta$.

Теорема 1. *Нелинейные ручные автоморфизмы свободной метабелевой алгебры Ли M_3 являются элементарно сократимыми.*

Следствие 1. *Автоморфизм*

$$(x_1, x_2, x_3 + [x_3, [x_1, x_2]])$$

не является ручным.

Это означает, что включение $AT(M_3) \supset TA(M_3)$ является строгим.

Теорема 2. *Нелинейные почти ручные автоморфизмы свободной метабелевой алгебры Ли M_3 являются почти элементарно сократимыми.*

Напомним, что В. С. Дренски [**1**] доказал, что внутренний автоморфизм $exp(ad[x_1, x_2])$ алгебры M_3 является диким. Более того, справедливо следующее

Следствие 2. *Автоморфизм* $\exp(ad[x_1, x_2])$ *не является почти ручным.*

Здесь отметим, что почти элементарные автоморфизмы свободных метабелевых групп исследованы в [**2**].

Для каждой пары (k, s), где $1 \leqslant k \neq s \leqslant n$, положим

$$(ks) = \sigma(s, 1, x_k)\sigma(k, 1, -x_s)\sigma(s, 1, x_k).$$

Тогда почти элементарные автоморфизмы (1) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sigma(i, \alpha, f)\sigma(i, \beta, g) = \sigma(i, \alpha\beta, \beta f + \sigma(i, \alpha, f)(g)); \tag{2}$$

$$\sigma(i, \alpha, f)\sigma(j, \beta, g) = \sigma(j, \beta, \sigma(i, \alpha, f)(g))\sigma(i, \alpha, f), \tag{3}$$

если $i \neq j$, f не зависит от x_j и $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0$;

$$\sigma(i, \alpha, f)^{(ks)} = \sigma(j, \alpha, (ks)(f)), \tag{4}$$

где $x_j = (ks)(x_i)$.

Теорема 3. *Соотношения* (2)–(4) *являются определяющими сотношениями группы* $AT(M_3)$ *относительно системы порождающих* (1).

Отметим, что определяющие сотношения группы ручных автоморфизмов $TA(K[x, y, z])$ алгебры многочленов $K[x, y, z]$ от трех переменных были описаны в [**3**].

Список литературы

[1] *V.Drensky*, Wild automorphisms of nilpotent-by-abelian Lie algebras, Manuscripta Math. 70 (1991), 157–182.

[2] *В. А. Романьков*, Свап гиппотеза Теннанта — Тернера, Алгебра и логика, 34 (1995), № 4 448–463.

[3] *U.U.Umirbaev*, Tame and wild automorphisms of polynomial algebras, Max-Planck-Institut fur Matematik Preprint Series 2004 (108).

ЕНУ им. Л. Н. Гумилева (Астана, Казахстан)

E-mail: nauryzbaev.r@mail.ru