Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Распознавание интерполяционного свойства Крейга и проективного свойства Бета в локально табличных позитивных логиках

П. А. Шрайнер

Данная работа продолжает работы [**1**], [**2**] и [**3**], посвященные автоматическому распознаванию различных свойств в некоторых классах неклассических логик.

Позитивная логика — множество позитивных формул, содержащее аксиомы позитивного фрагмента интуиционистского исчисления высказываний и замкнутое относительно правил подстановки и модус поненс.

Говорим, что логика L имеет *интерполяционное свойство Крейга* (CIP), если для любой формулы вида $A \to B$ из логики L найдется такая формула C, что формулы $A \to C$ и $C \to B$ принадлежат логике L, при этом любая переменная формулы C входит и в A, и в B.

Логика L обладает *проективным свойством Бета* (PBP), если для любой формулы вида $A(P, Q, x) \& A(P, Q', y) \to (x \leftrightarrow y)$ из логики L найдется такая формула $C(p)$, что формула $A(P, Q, x) \to (x \leftrightarrow C(P))$ принадлежит логике L (здесь P, Q, Q' — попарно непересекающиеся списки переменных, которые не содержат переменных x и y).

Формула $B(P)$ называется явным определением x в L.

Л. Л. Максимовой в [**4**] было доказано, что позитивных логик, обладающих проективным свойством Бета, в точности семь, четыре из которых обладают интерполяционным свойством Крейга.

Шесть из этих логик являются локально табличными (для любого конечного множества переменных существует только конечное число формул, от этих переменных, не эквивалентных в логике).

В силу вышеупомянутых результатов, для того, чтобы проверить, будет ли позитивная логика, полученная добавлением новой схемы аксиом к позитивному фрагменту интуиционистской логики, локально табличной логикой с проективным свойством Бета (интерполяционным свойством Крейга), нам достаточно выяснить, будет ли она совпадать с одной из вышеупомянутых шести (трех) логик.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект № НШ-2069.2003.1), РФФИ (проект № 03-06-80178), INTAS (проект № 04-77-7080).

Напомним, что *интуиционистская шкала Крипке* — это пара $\langle W, \leq \rangle$, где W — непустое множество миров, а $\leq$ — частичный порядок на W.

Веером мы называем шкалу Крипке, у которой один элемент наименьший, а остальные — максимальные.

Будем обозначать через $L + A$ логику, полученную из логики L добавлением формулы A в качестве новой схемы аксиом. Заметим, что данное определение можно распространить на конечное число формул, взяв в качестве добавляемой формулы их конъюнкцию.

Автоматизировать проверку свойств CIP и PBP нам поможет следующее

Предложение 1. *Имеют место следующие утверждения для логики $L = Int^+ + A$, где A — формула от N переменных, $I = \max(1,$ количество импликаций в формуле $A)$.*

1. *Логика L совпадает с противоречивой логикой For^+, если формула A опровергается на одноэлементной шкале.*
2. *Логика L совпадает с позитивным фрагментом классической логики Cl^+, если формула A истинна на одноэлементной шкале и опровергается на двухэлементной линейной шкале.*
3. *Логика L совпадает с логикой Z_3^+, если формула A истинна на двухэлементной линейной шкале и опровергается на трехэлементной линейной шкале и трехэлементном веере.*
4. *Логика L совпадает с позитивным фрагментом логики Даммета LC^+, если формула A истинна на линейно упорядоченной шкале высоты $N+1$ и опровергается на трехэлементном веере.*
5. *Логика L совпадает с логикой LP_2^+, если формула A истинна на веере, имеющем $\min(2^N, I)$ максимальных элементов, и опровергается на трехэлементной линейно упорядоченной шкале.*
6. *Логика L совпадает с логикой $\Delta(LC)^+$, если формула A истинна на шкале, образованной из I линейно упорядоченных шкал, каждая из которых состоит из $\min(I, N)$ элементов, добавлением минимального элемента, и опровергается на шкале, полученной из трехэлементного веера добавлением минимального элемента.*

Данное предложение получается улучшением оценок, приведенных в работе [**5**]. В [**4**] доказано, что все вышеперечисленные шесть логик имеют проективное свойство Бета. При этом логики For^+, Cl^+ и LC^+ обладают также интерполяционным свойством Крейга, а логики Z_3^+, LP_2^+ и $\Delta(LC)^+$ им не обладают.

Автором создана программа, реализующие вышеописанный алгоритм проверки интерполяционного свойства Крейга и проективного свойства Бета для позитивных локально табличных логик.

Заметим, что эта программа (после небольшой модификации) может быть использована также для проверки интерполяционного свойства Крейга и проективного свойства Бета в позитивно аксиоматизируемых расширениях минимальной логики.

Список литературы

[1] *П. А. Шрайнер*, Автоматическое распознавание интерполяционного свойства у некоторых суперинтуиционистских пропозициональных логик, Вестник НГУ, **3**, № 4 (2003), 85–92.

[2] *Л. Л. Максимова, П. А. Шрайнер*, Алгоритмы распознавания табличности и предтабличности в расширениях интуиционистского исчисления, Вестник НГУ, *принято в печать*.

[3] *P. Schreiner*, Automatized recognition of interpolation over S4.3, Book of abstracts, Logic Colloquium 2005, Athens, Greece, 2005, 113.

[4] *Л. Л. Максимова*, Неявная определимость и позитивные логики, Алгебра и логика, **42**, № 1 (2003), 65–93.

[5] *L. Maksimova*, Complexity of some problems in positive and related calculi, Theoretical Computer Science, **303** (2003), 171–185.

E-mail: `schr@ngs.ru`