Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Сильная теорема о замене для базисной нечеткой логики и нечетких логик с модальностями

О. В. Зеевальд

Формулы базисной нечеткой логики BL строятся из пропозициональных переменных $p_1, p_2, \ldots$, связок $\&, \rightarrow$, и истинностных константы $\overline{0}$;

$$\varphi \leftrightarrow \psi \text{ есть } (\varphi \rightarrow \psi)\&(\psi \rightarrow \varphi).$$

Аксиоматизация базисной нечеткой логики BL дана в [**1**]. В этой же книге [**1**] дано определение BL-алгебры.

Пусть $\mathbb{L} = (L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ — BL-алгебра. $\mathbb{L}$-*Означиванием* называется отображение e из множества формул в L, где

$$e(\overline{0}) = 0, \quad e(\varphi \rightarrow \psi) = e(\varphi) \Rightarrow e(\psi), \quad e(\varphi\&\psi) = e(\varphi) * e(\psi).$$

Формула φ называется $\mathbb{L}$-*тавтологией*, если $e(\varphi) = 1$ для любого $\mathbb{L}$-означивания e (здесь 1 — наибольший элемент BL-алгебры L).

Пусть $\mathcal{C}$ — расширение BL с помощью новых схем аксиом. Алгебра $\mathbb{L}$ называется $\mathcal{C}$-*алгеброй*, если все аксиомы $\mathcal{C}$ являются $\mathbb{L}$-тавтологиями. Формулы логики $S5(\mathcal{C})$ строятся из пропозициональных переменных, связок $(\&, \rightarrow)$, истинностнаой константы $\overline{0}$ и модальностей $\Box, \diamond$.

Пусть $\mathbf{L}$ — $\mathcal{C}$-алгебра. Тогда $\mathbf{L}$-*модель Крипке* логики $S5(\mathcal{C})$ имеет вид $\mathbf{K} = \langle W, e, \mathbf{L}\rangle$, где W — непустое множество и $e : (W \times Prop) \rightarrow \mathbf{L}$, $Prop$ — множество всех пропозициональных переменных.

Степень истинности $\|\varphi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},w}$ определяется следующим образом:

$\|p\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},w} = e(w,p)$, $\|\overline{0}\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},w} = 0_{\mathbf{L}}$,

$\|\varphi\&\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},w} = \|\varphi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},w} * \|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},w}$, $\|\varphi \rightarrow \psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},w} = \|\varphi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},w} \Rightarrow \|\psi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},w}$,

$\|\Box\varphi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},w} = \inf\limits_{v\in W} \|\varphi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},v}$, $\|\diamond\varphi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},w} = \sup\limits_{v\in W} \|\varphi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},v}$,

(если эти inf и sup существуют, иначе не определено)

Модель $\mathbf{K}$ нзываем $\mathbf{L}$-*безопасной*, если все необходимые inf и sup существуют. Формула φ называется $\mathbf{L}$-*тавтологией* логики $S5(\mathcal{C})$, если $\|\varphi\|^{\mathbf{L}}_{\mathbf{K},v} = 1_{\mathbf{L}}$ для любой безопасной $\mathbf{L}$-модели Крипке для $S5(\mathcal{C})$ для любого $v \in W$. Формула φ называется $S5(\mathcal{C})$-*тавтологией*, если для любой $\mathcal{C}$-алгебры $\mathbf{L}$ формула φ является $\mathbf{L}$-тавтологией логики $S5(\mathcal{C})$.

Теорема 1 (о замене). *Пусть $C(P_1, \ldots, P_n)$ — формула с переменными $P_1, \ldots, P_n$, и число вхождений P_i в $C(P_1, \ldots, P_n)$ равно k_i для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Обозначим через $C(Q_1, \dots, Q_n)$ *результат замены всех вхождений переменной* P_i *на* Q_i *для всех* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Тогда*

$$BL \vdash \big((P_1 \leftrightarrow Q_1)^{k_1} \& \dots \& (P_n \leftrightarrow Q_n)^{k_n}\big) \to \big(C(P_1, \dots, P_n) \leftrightarrow C(Q_1, \dots, Q_n)\big).$$

Возьмем в качестве схем аксиом нечеткой логики с модальностями следующие формулы:

1. Аксиомы базисной логики BL: $(A1) - (A7)$,

2. Аксиомы $S5$:

$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$, $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$, $\diamond\varphi \to \Box \diamond \varphi$, $\Box\varphi \to \varphi$,

3. Дополнительную аксиому: $\Box(\varphi \to \psi) \to (\diamond\varphi \to \diamond\psi)$.

Правила вывода : *modus ponens*, $\frac{A}{\Box A}$.

Полученное исчисление назовем $S5(BL)'$.

Теорема 2 (о замене). *Пусть* $C(P_1, \dots, P_n)$ — *формула с переменными* $P_1, \dots, P_n$, *и число вхождений* P_i *в* $C(P_1, \dots, P_n)$ *равно* k_i *для всех* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Обозначим через* $C(Q_1, \dots, Q_n)$ *результат замены всех вхождений переменной* P_i *на* Q_i *для всех* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Тогда*

$$S5(BL)' \vdash \big((\Box(P_1 \leftrightarrow Q_1))^{k_1} \& \dots \& (\Box(P_n \leftrightarrow Q_n))^{k_n}\big) \to$$
$$\to \big(C(P_1, \dots, P_n) \leftrightarrow C(Q_1, \dots, Q_n)\big).$$

Следствие 1. *Пусть* $C(A_1, \dots, A_n)$ — *формула, имеющая одно или более вхождение подформулы* A_i *для каждого* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Обозначим через* $C(B_1, \dots, B_n)$ *результат замены всех вхождений подформулы* A_i *в* $C(A_1, \dots, A_n)$ *на формулу* B_i *для каждого* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Тогда в* $S5(BL)'$ *верно*

$$\frac{A_1 \leftrightarrow B_1, \dots, A_n \leftrightarrow B_n}{C(A_1, \dots, A_n) \leftrightarrow C(B_1, \dots, B_n)}.$$

В случае $S5(BL)'$ теорема о дедукции имеет следующий вид:

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{C}$ *- любое аксиоматическое расширение* $S5(BL)'$. *Пусть* T — *множество формул,* A, B — *формулы. Тогда в* $\mathcal{C}$ *выполнено* $T \cup \{A\} \vdash B$ *тогда и только тогда, когда существет* k *такой, что* $T \vdash (\Box A)^k \to B$.

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS 04-77-7080.

Список литературы

[1] **Hajek P.** Metamathematics of fuzzy logic, Dordrecht, Kluwer Academic publishers, 1998.
[2] **Baas M. and Veith H.** Quantifier Elimination in Fuzzy Logic, In CSL'98, LNCS 1584, 399-414, 1999, Springer Verlag Berlin Heidelberg.
[3] **Baas M. and Veith H.** Interpolation in Fuzzy Logic, Archive for Mathematical Logic, accepted for publication, 461-489, 1999.

E-mail: neona@gorodok.net