Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Ручные и дикие автоморфизмы алгебры многочленов и свободных ассоциативных алгебр

У. У. Умирбаев

Все алгебры рассматриваются над фиксированным полем F характеристики 0. Пусть $A_n = F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — алгебра многочленов над полем F от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и пусть $\mathrm{Aut}\, A_n$ — группа автоморфизмов алгебры A_n. Через $\phi = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ будем обозначать автоморфизм алгебры A_n такой, что $\phi(x_i) = f_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Автоморфизмы вида

$$(1) \qquad \sigma(i, \alpha, f) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x_i + f, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где $0 \neq \alpha \in F$, $f \in F[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$, называются *элементарными*. Подгруппа $TA(A_n)$ группы $\mathrm{Aut}\, A_n$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется подгруппой *ручных автоморфизмов*, и элементы этой подгруппы называются *ручными автоморфизмами* алгебры A_n. Не ручные автоморфизмы алгебры A_n называются *дикими*.

Хорошо известно [**2, 5, 6, 7**], что автоморфизмы колец многочленов и свободных ассоциативных алгебр от двух переменных являются ручными. Совсем недавно было доказано [**13, 9, 10, 11**], что известный автоморфизм Нагаты (см. [**8**])

$$\sigma \quad = \quad (x + (x^2 - yz)z,\ y + 2(x^2 - yz)x + (x^2 - yz)^2 z,\ z)$$

колец многочленов $F[x, y, z]$ от трех переменных над полем характеристики 0 является диким. Более того, в [**14**] показано, что первые две координаты автоморфизма Нагаты не могут быть координатами никаких ручных автоморфизмов алгебры $F[x, y, z]$.

В случае свободных ассоциативных алгебр вопрос о существовании диких автоморфизмов оставался открытым и сформулирован в [**3**, Проблема 1.74] как проблема П.Кона. Наиболее известным кандидатом в дикие автоморфизмы является автоморфизм Аника (см. [**1**, стр. 343])

$$\delta \quad = \quad (x + z(xz - zy),\ y + (xz - zy)z,\ z)$$

свободной ассоциативной алгебры $F < x, y, z >$.

Автоморфизмы Нагаты и Аника являются стабильно ручными [**12**].

Группы автоморфизмов алгебры полиномов и свободных ассоциативных алгебр от двух переменных изоморфны и имеют прозрачное представление в виде свободного произведения подгрупп (см., например, [**1**]). Определяющие соотношения двумерной группы Кремона (группы автоморфизмов алгебры рациональных функций от двух переменных) найдены в [**4**].

В настоящей работе найдены определяющие соотношения группы ручных автоморфизмов колец многочленов от трех переменных над полем характеристики 0, как группы, порожденной всеми элементарными автоморфизмами. Далее, с использованием этого результата доказано, что автоморфизм Аника свободной ассоциативной алгебры от трех переменных является диким.

Список литературы

[1] Cohn P. M. Free rings and their relations, 2nd Ed., Academic Press, London, 1985, 346.
[2] Czerniakiewicz A. G., Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 160, 393–401; 1972, 171, 309–315.
[3] Днестровская тетрадь, Новосибирск, 4-е издание, 1993, 73.
[4] Гизатуллин М. Х., Изв. АН СССР, сер. матем., 1982, 46, no. 5, 909–970.
[5] Jung H. W. E., J. reine angew. Math., 1942, 184, 161–174.
[6] Van der Kulk W, Nieuw Archief voor Wiskunde, 1953, 3, no. 1, 33–41.
[7] Макар-Лиманов Л. Г., Функ. анализ и его приложен., 1970, 4, вып. 3, 107-108.
[8] Nagata M., On the automorphism group of $k[x, y]$, Lect. in Math., Kyoto Univ., Kinokuniya, Tokio, 1972, 53.
[9] Shestakov I. P., Umirbaev U. U., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 2003, 100, no. 22, 12561–12563.
[10] Shestakov I. P., Umirbaev U. U., Journal of the American Mathematical Society, 2004, 17, 181–196.
[11] Shestakov I. P., Umirbaev U. U., Journal of the American Mathematical Society, 2004, 17, 197–227.
[12] Smith M. K., J. Pure and Appl. Algebra., 1989, 58, 209–212.
[13] Умирбаев У. У., Шестаков И. П., Доклады РАН, 2002, 386, вып. 6, 745–748.
[14] Umirbaev U. U., Yu J.-T., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 2004, 101, no. 13, 4352–4355.

Астана, Казахстан
E-mail: umirbaev@yahoo.com