Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Картеровы подгруппы конечных групп

Е. П. Вдовин

Напомним, что нильпотентная подгруппа, совпадающая со своим нормализатором, называется *картеровой подгруппой.* Р. Картер в работе 1961 года доказал, что в любой конечной разрешимой группе картеровы подгруппы существуют и сопряжены. Кроме того, образ картеровой подгруппы в разрешимой группе относительно любого гомоморфизма вновь является картеровой подгруппой.

Заметим, что пересечение картеровой подгруппы K группы G с нормальной подгруппой H группы G может не совпадать с картеровой подгруппой группы H. Рассмотрим в качестве группы G группу Sym_4, а в качестве H ее нормальную подгруппу индекса 2 — Alt_4. Хорошо известно, что группа Sym_4 разрешима и ее картерова подгруппа K является силовской 2-подгруппой. С другой стороны, картерова подгруппа группы Alt_4 является ее силовской 3-подгруппой.

Если отбросить предположение о конечности группы, то картеровы подгруппы могут быть не только несопряжены, но и неизоморфны. Свободное произведение двух неизоморфных нильпотентных групп K_1 и K_2 дает такой пример. Кроме того, произвольная конечная группа может не содержать картеровых подгрупп. Минимальным примером является группа Alt_5. Однако, не было известно ни одного примера конечных групп, содержащих несопряженные картеровы подгруппы. Всвязи с этим возникла следующая

Проблема. Сопряжены ли картеровы подгруппы в конечных группах?

В последние 30 лет различными авторами исследовались картеровы подгруппы в различных классах неразрешимых групп, близких к простым. В частности, положительный ответ был получен в следующих группах: симметрических и знакопеременных (Л. Ди Мартино, М. К. Тамбурини, 1976); для любой группы G, удовлетворяющей $SL_n(q) \leq G \leq GL_n(q)$ (Н. А. Вавилов, 1979; Л. Ди Мартино и М. К. Тамбурини, 1987); для групп $Sp_{2n}(q)$, $GU_n(q^2)$ и $GO_n^{\pm}(q)$, в последнем случае q нечетно, (Л. Ди Мартино, А. Е. Залесский, М. К. Тамбурини, 1997). Позже проблема была положительно решена для любой группы G, удовлетворяющей условию $O^{p'}(S) \leq G \leq S$, где $S \in \{Sp_{2n}(q), GU_n(q^2), GO_n^{\pm}(q)\}$ (А. Превитали, М. К. Тамбурини, Е. П. Вдовин, 2004).

В 1998 году Ф. Далла Волта, А. Луккини и М. К. Тамбурини доказали, что контрпример минимального порядка должен быть почти простой группой, что позвозволяет надеяться на решение проблемы сопряженности картеровых подгрупп с помощью классификации конечных простых групп.

Легко заметить, что если G — контрпример минимального порядка и K — ее картерова подгруппа, то никакой элемент $z \in Z(K)$ простого порядка не может быть сопряжен со своей нетривиальной степенью в группе G.

Действительно, предположим, что $z, z^g \in Z(K)$ для некоторого $g \in G$. Рассмотрим $\langle K, K^g\rangle$. Ее центр нетривиален, следовательно, $|\langle K, K^g\rangle| < |G|$, т. е. картеровы подгруппы в группе $\langle K, K^g\rangle$ сопряжены. Значит, существует такой $x \in \langle K, K^g\rangle$, что $K^x = K^g$, в частности, $z^x = z^g$. Но $z^g \in Z(K) \cap Z(K^g) \leq Z(\langle K, K^g\rangle)$, т. е. $z^x = z$.

Используя данное замечание и изучая сопряженные элементы простого порядка в конечных простых группах, М. К. Тамбурини и Е. П. Вдовин в 2002 году показали, что большой класс почти простых групп не является контрпримером минимального порядка. В частности, все простые группы входят в этот класс.

$\mathrm{Soc}(A) = G$	Условия для A
знакопеременные, спорадические; $A_1(r^t),\ B_\ell(r^t),\ C_\ell(r^t),\ t$ четно если $r = 3$; ${}^2B_2(2^{2n+1}),\ G_2(r^t),\ F_4(r^t),\ {}^2F_4(2^{2n+1})$; $E_7(r^t),\ r \neq 3;\ E_8(r^t),\ r \neq 3, 5$	никаких
$D_{2\ell}(r^t),\ {}^3D_4(r^{3t}),\ {}^2D_{2\ell}(r^{2t})$, t четно если $r = 3$ и, если $G = D_4(r^t)$, $\lvert(\mathrm{Field}(G) \cap A) : (\widehat{G} \cap A)\rvert_{2'} > 1$	$A/(A \cap \widehat{G})$ 2 – группа или $\lvert\widehat{G} : (A \cap \widehat{G})\rvert \leqslant 2$
$B_\ell(3^t),\ C_\ell(3^t),\ D_{2\ell}(3^t),\ {}^3D_4(3^{3t}),\ {}^2D_{2\ell}(3^{2t})$, $D_{2\ell+1}(r^t),\ {}^2D_{2\ell+1}(r^{2t}),\ {}^2G_2(3^{2n+1})$, $E_6(r^t),\ {}^2E_6(r^{2t}),\ E_7(3^t),\ E_8(3^t),\ E_8(5^t)$	$A = G$
$A_\ell(r^t),\ {}^2A_\ell(r^{2t}),\ \ell > 1$	$G \leq A \leq \widehat{G}$,

Если G — группа, A, B, H — подгруппы группы G и B нормальна в A, то $N_H(A/B) = N_H(A) \cap N_H(B)$. Если $x \in N_H(A/B)$, то x индуцирует автоморфизм $Ba \mapsto Bx^{-1}ax$ группы A/B. Таким образом, существует гомоморфизм группы $N_H(A/B)$ в $\mathrm{Aut}(A/B)$. Образ этого гомоморфизма обозначается за $\mathrm{Aut}_H(A/B)$. В частности, если S — композиционный факторгруппы G, то для любой $H \leq G$ определена группа $\mathrm{Aut}_H(S)$.

Говорят, что конечная группа G удовлетворяет условию $(*)$ если, для любого ее неабелева композиционного фактора S и любой ее нильпотентной подгруппы N, картеровы подгруппы группы $\langle \mathrm{Aut}_N(S), S\rangle$ сопряжены. В 2005 году Е. П. Вдовин доказал следующую теорему

Теорема. *Если конечная группа G удовлетворяет $(*)$, то картеровы подгруппы группы G сопряжены.*

Лемма. *Предположим, что G — конечная группа. Пусть K — картерова подгруппа группы G с центром $Z(K)$. Предположим также, что $e \neq z \in Z(K)$ и $C_G(z)$ удовлетворяет $(*)$.*

(1) *Любая подгруппа Y, содержащая K и удовлетворяющая $(*)$ самонормализуема в G.*

(2) *Никакой сопряженный с z в G, кроме z, не лежит в $Z(G)$.*

(3) *Если H — картерова подгруппа группы G, несопряженная с K, то z не сопряжен ни с каким элементом из центра группы H.*

В частности, централизатор $C_G(z)$ самонормализуем в G и z не сопряжен ни с какой степенью $z^k \neq z$.

Теорема (Критерий существования). *Пусть G — конечная группа и S — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда G содержит картерову подгруппу K, удовлетворяющую $S \leq K$, в том и только в том случае, если $N_G(S) = SC_G(S)$.*

Лемма о спуске. *Пусть G — конечная группа. Пусть H — картерова подгруппа группы G. Предположим, что существует нормальная подгруппа $B = T_1 \times \ldots \times T_k$ группы G такая, что $T_1 \simeq \ldots \simeq T_k \simeq T$, $Z(T_i) = \{1\}$ для всех i, и $G = H(T_1 \times \ldots \times T_k)$.*

Тогда $\mathrm{Aut}_H(T_i)$ является картеровой подгруппой группы $\langle \mathrm{Aut}_H(T_i), T_i \rangle$.

Первая лемма о подъеме. *Пусть G — конечная группа, пусть S — силовская 2-подгруппа группы G и $x \in N_G(S)$ нечетного порядка. Предположим, что существуют такие нормальные подгруппы $G_1, \ldots, G_k$ группы G, что $G_1 \cap \ldots \cap G_k \cap S \leq Z(N_G(S))$. Если $\varphi_i : G \to G_i$ — натуральный гомоморфизм, предположим также, что x^{φ_i} централизует SG_i/G_i.*

Тогда x централизует S.

Вторая лемма о подъеме. *Пусть G — конечная группа, пусть H — такая нормальная подгруппа группы G, что $|G : H| = 2^t$. Пусть S, T — силовские 2-подгруппы групп G ,H соответственно и $N_H(T) = TC_H(T)$. Тогда $N_G(S) = SC_G(S)$.*

В частности, группы G, H содержат картеровы подгруппы K, L соответственно, удовлетворяющие $S \leq K$ и $T \leq L$.

Классификационная теорема. *Пусть G — конечная группа лиева типа, G не обязательно простая, над полем характеристики p. Выберем подгруппу A группы $\mathrm{Aut}(G)$, содержащую G, и предположим, что A не содержит графовый автоморфизм порядка 3, если $G = D_4(q)$ или $G = {}^3D_4(q^3)$. Пусть K — картерова подгруппа группы A и предположим, что $A = KG$.*

Тогда выполнено в точности одно из следующих утверждений:

(1) *$\Gamma G = {}^2A_2(2^{2t}) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, $|\zeta| = t$ нечетно, $K \cap {}^2A_2(2^{2t})$ имеет порядок $2 \cdot 3$ и изоморфна картеровой подгруппе группы ${}^2A_2(2^2)$.*

(2) *G определена над $GF(2^t)$, ζ является полевым автоморфизмом, $|\zeta| = t$, и $K = S \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где S является силовской 2-подгруппой группы $G_{\zeta_{2'}}$.*

(3) *$G \simeq PSL_2(3^t)$, $|\zeta| = t$ нечетное, и $K = S \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, где S является силовской 3-подгруппой группы $G_{\zeta_{3'}}$.*

(4) *$\Gamma G = {}^2G_2(3^{2n+1}) \leftthreetimes \langle\zeta\rangle$, $|\zeta| = 2n+1$, и $K \cap {}^2G_2(3^{2n+1}) = S \times P$, где S порядка 2 и $|P| = 3^{|\zeta|_3}$.*

(5) *p не делит $|K \cap G|$ и K содержит силовскую 2-подгруппу группы A.*

Схема доказательства следующая.

1. Построение в группе A параболических подгрупп и редуктивных подгрупп максимального ранга и перенос результатов о нормализаторах p-подгрупп и централизаторах полупростых элементов на группу A. Легко заметить, что $K \vartriangleright K \cap G \neq \{e\}$, поэтому $Z(K) \cap G \neq \{e\}$ и существует элемент $x \in Z(K) \cap G$ простого порядка.

2. Если $|x| = p$, то тогда K содержится в параболической подгруппе группы A. Порядок картеровой подгруппы ее фактора Леви не делится на p. Используя лемму о спуске получаем, что для всех его (фактора Леви) неабелевых композиционных факторов выполнен пункт (5) классификационной теоремы. Используя обе леммы о подъеме получаем, что K содержит силовскую 2-подгруппу исходной параболической группы, но силовская 2-подгруппа не централизует никакой элемент порядка p.

3. Если $|x| \neq p$, то K содержится в $C_A(x)$, который в свою очередь содержит нормальную редуктивную подгруппу максимального ранга R группы A. Используя лемму о спуске получаем, что для всех неабелевых композиционных факторов группы R выполнен пункт (5) классификационной теоремы. Следовательно, можно считать, что $|x| = 2$.

4. Теперь x является инволюцией. Используя лемму о спуске, мы получаем, что K содержит силовские 2-подгруппы всех неабелевых композиционных факторов группы R. Из лемм о подъеме следует, что K содержит силовскую 2-подгруппу группы $C_A(x)$. Следовательно, K содержит силовскую 2-подгруппу группы A.

Теорема. *Пусть G — либо $D_4(q)$, либо ${}^3D_4(q^3)$. Предположим, что τ — графовый автоморфизм группы G порядка 3 (в случае группы ${}^3D_4(q^3)$ это автоморфизм, множество неподвижных точек которого изоморфно $D_4(q)$). Обозначим за A_1 подгруппу группы $\mathrm{Aut}(G)$, порожденную всеми автоморфизмами, кроме τ. Пусть $A \leq \mathrm{Aut}(G)$ такова, что $A \not\leq A_1$, и пусть K — картерова подгруппа группы A.*

Тогда $\tau \in K$, $K \cap A_1$ лежит в силовской 2-подгруппе группы $C_A(\tau) \simeq \Gamma G_2(q)$ и $\Gamma G_2(q)/G_2(q)$ есть 2-группа. Силовская 2-подгруппа S группы $\Gamma G_2(q)$ удовлетворяет $K_{\Gamma G_2(q)}(S) = SC_{\Gamma G_2(q)}(S)$ (т. е. удовлетворяет критерию существования) если либо q нечетно, либо q четно, $q = 2^{2^t}$, и $|\Gamma G_2(q) : G_2(q)| = 2^t$.

Главная теорема. *Пусть G — конечная группа. Тогда картеровы подгруппы группы G сопряжены.*

Теорема. *Пусть G — конечная группа, K — ее картерова подгруппа и φ — гомоморфизм группы G. Тогда K^φ является картеровой подгруппой группы G^φ.*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: vdovin@math.nsc.ru